
Suites

1 Convergence

Exercice 1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R} . Que pensez-vous des propositions suivantes :

- Si $(u_n)_n$ converge vers un réel l alors $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers l .
- Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, il en est de même de $(u_n)_n$.
- Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes, de même limite l , il en est de même de $(u_n)_n$.

Exercice 2 Montrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice 3 Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$

n'est pas convergente.

Exercice 4 Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire à partir d'un certain rang.

Exercice 5 Soit $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$.

1. En utilisant une intégrale, montrer que $\forall n > 0 \quad \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
2. En déduire que $\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite de H_n .
4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive.
5. Conclusion ?

Exercice 6 Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos \frac{2n\pi}{q}$.

1. montrer que $u_{n+q} = u_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1} . En déduire que la suite u_n n'a pas de limite.

Exercice 7 (Examen 2000) On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0, 1/2[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3. Montrer que $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et que la fonction f est croissante sur \mathbb{R}^+ . En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leq x_n < 1/2$ pour tout $n \geq 0$.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers α .

2 Limites

Exercice 8 Posons $u_2 = 1 - \frac{1}{2^2}$ et pour tout entier $n \geq 3$,

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Calculer u_n . En déduire que l'on a $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 9 Déterminer les limites lorsque n tend vers l'infini des suites ci-dessous ; pour chacune, essayer de préciser en quelques mots la méthode employée.

1. $1 ; -\frac{1}{2} ; \frac{1}{3} ; \dots ; \frac{(-1)^{n-1}}{n} ; \dots$
2. $2/1 ; 4/3 ; 6/5 ; \dots ; 2n/(2n-1) ; \dots$
3. $0,23 ; 0,233 ; \dots ; 0,233 \cdots 3 ; \dots$
4. $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2}$
5. $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$
6. $\left[\frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right]$
7. $\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
8. $\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
9. $(1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots + 1/2^n)$ puis $\sqrt{2} ; \sqrt{2\sqrt{2}} ; \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} ; \dots$
10. $\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^n}{3^n}\right)$
11. $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
12. $\frac{n \sin(n!)}{n^2 + 1}$
13. Démontrer la formule $1+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; en déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2^2+3^2+\dots+n^2}{n^3}$.

Exercice 10 (Méthode d'Héron) Soit $a > 0$. On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par u_0 un réel vérifiant $u_0 > 0$ et par la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

On se propose de montrer que (u_n) tend vers \sqrt{a} .

1. Montrer que

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}.$$

2. Montrer que si $n \geq 1$ alors $u_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge vers \sqrt{a} .

4. En utilisant la relation $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$ donner une majoration de $u_{n+1} - \sqrt{a}$ en fonction de $u_n - \sqrt{a}$.
5. Si $u_1 - \sqrt{a} \leq k$ et pour $n \geq 1$ montrer que

$$u_n - \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a} \left(\frac{k}{2\sqrt{a}} \right)^{2^{n-1}}.$$

6. Application : Calculer $\sqrt{10}$ avec une précision de 8 chiffres après la virgule, en prenant $u_0 = 3$.

Exercice 11 On considère les deux suites :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}; \quad n \in \mathbb{N},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n!}; \quad n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ convergent vers une même limite. Et montrer que cette limite est un élément de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Exercice 12 Soient a et b deux réels, $a < b$. On considère la fonction $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$, supposée continue et monotone, et une suite récurrente $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 \in [a, b] \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. On suppose que f est croissante. Montrer que $(u_n)_n$ est monotone et en déduire sa convergence vers une solution de l'équation $f(x) = x$.
2. Application :

$$u_0 = 4 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{4u_n + 5}{u_n + 3}.$$

3. On suppose que f est décroissante. Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones et convergentes.
4. Application :

$$u_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = (1 - u_n)^2.$$

Calculer les limites des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Exercice 13 1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

2. Montrer les inégalités suivantes ($b \geq a > 0$) :

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b \quad \text{et} \quad a \leq \sqrt{ab} \leq b.$$

3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

- (a) Montrer que $u_n \leq v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.

- (c) Montrer que (u_n) est croissante. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et qu'elles ont même limite.

Exercice 14 Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que l'équation $\sum_{k=1}^n x^k = 1$ admet une unique solution a_n dans $[0, 1]$.
2. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que (a_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

Suites

Indication 1 Dans l'ordre c'est vrai, faux et vrai. Lorsque c'est faux chercher un contre-exemple, lorsque c'est vrai il faut le prouver.

Indication 2 Écrire la définition de la convergence d'une suite (u_n) avec "les ε ". Comme on a une proposition qui est vraie pour tout $\varepsilon > 0$, c'est en particulier vrai pour $\varepsilon = 1$. Cela nous donne un " N ". Ensuite séparez la suite en deux : regardez les $n < N$ (il n'y a qu'un nombre fini de termes) et les $n \geq N$ (pour lequel on utilise notre $\varepsilon = 1$).

Indication 3 On prendra garde à ne pas parler de limite d'une suite sans savoir au préalable qu'elle converge !

Vous pouvez utiliser le résultat du cours suivant : Soit (u_n) une suite convergeant vers la limite ℓ alors toute sous-suite (v_n) de (u_n) a pour limite ℓ .

Indication 4 Écrire la convergence de la suite et fixer $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Indication 5 1. En se rappelant que l'intégrale calcule une aire montrer :

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}.$$

2. Pour chacune des majoration il s'agit de faire la somme de l'inégalité précédente et de s'apercevoir que d'un coté on calcule H_n et de l'autre les termes s'éliminent presque tous deux à deux.
3. La limite est $+\infty$.
4. Calculer $u_{n+1} - u_n$.
5. C'est le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Indication 6 Pour la deuxième question, raisonner par l'absurde et trouver deux sous-suites ayant des limites distinctes.

Indication 7 Pour la première question : attention on ne demande pas de calculer α ! L'existence vient du théorème des valeurs intermédiaires. L'unicité vient du fait que la fonction est strictement croissante.

Pour la dernière question : il faut d'une part montrer que (x_n) converge et on note ℓ sa limite et d'autre part il faut montrer que $\ell = \alpha$.

Indication 8 Remarquer que $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k \cdot k}$. Puis simplifier l'écriture de u_n .

Indication 10 1. C'est un calcul de réduction au même dénominateur.

2. Pour montrer la décroissance, montrer $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$.
3. Montrer d'abord que la suite converge, montrer ensuite que la limite est \sqrt{a} .

4. Penser à écrire $u_{n+1}^2 - a = (u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a})$.
5. Raisonner par récurrence.
6. Pour $u_0 = 3$ on a $u_1 = 3,166\dots$, donc $3 \leq \sqrt{10} \leq u_1$ et on peut prendre $k = 0.17$ par exemple et $n = 4$ suffit pour la précision demandée.

Indication 11 1. Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.
 2. Montrer que (u_n) est majorée et (v_n) minorée. Montrer que ces suites ont la même limite.
 3. Raisonner par l'absurde : si la limite $\ell = \frac{p}{q}$ alors multiplier l'inégalité $u_q \leq \frac{p}{q} \leq v_q$ par $q!$ et raisonner avec des entiers.

Indication 12 Pour la première question et la monotonie il faut raisonner par récurrence. Pour la troisième question, remarquer que si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante et appliquer la première question.

Indication 14 On notera $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k - 1$.

1. C'est une étude de la fonction f_n .
2. On sait que $f_n(a_n) = 0$. Montrer par un calcul que $f_n(a_{n-1}) > 0$, en déduire la décroissance de (a_n) . En calculant $f_n(\frac{1}{2})$ montrer que la suite (a_n) est minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Une fois établie la convergence de (a_n) vers une limite ℓ composée l'inégalité $\frac{1}{2} \leq \ell < a_n$ par f_n . Conclure.

Suites

Correction 1 1. Vraie. Toute sous-suite d'une suite convergente est convergente et admet la même limite.

2. Faux. Un contre-exemple est la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = (-1)^n$. Alors $(u_{2n})_n$ est la suite constante (donc convergente) de valeur 1, et $(u_{2n+1})_n$ est constante de valeur -1 . Cependant la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

3. Vraie. La convergence de la suite $(u_n)_n$ vers ℓ , que nous souhaitons démontrer, s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que } (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Fixons $\varepsilon > 0$. Comme, par hypothèse, la suite $(u_{2p})_p$ converge vers ℓ alors il existe N_1 tel

$$2p \geq N_1 \Rightarrow |u_{2p} - \ell| < \varepsilon.$$

Et de même, pour la suite $(u_{2p+1})_p$ il existe N_2 tel que

$$2p + 1 \geq N_2 \Rightarrow |u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2)$, alors

$$n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Ce qui prouve la convergence de $(u_n)_n$ vers ℓ .

Correction 2 Soit (u_n) une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. Par définition

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Choisissons $\varepsilon = 1$, nous obtenons le N correspondant. Alors pour $n \geq N$, nous avons $|u_n - \ell| < 1$, soit $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$. Notons $M = \max_{n=1, \dots, N} \{u_n\}$ et puis $M' = \max(M, \ell + 1)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n \leq M'$. De même en posant $m = \min_{n=1, \dots, N} \{u_n\}$ et $m' = \min(m, \ell - 1)$ nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m'$.

Correction 3 Beaucoup d'entre vous ont compris que u_n n'avait pas de limite, mais peu sont arrivé à en donner une démonstration formelle. En effet, dès lors qu'on ne sait pas qu'une suite (u_n) converge, on ne peut pas écrire $\lim u_n$, c'est un nombre qui n'est pas défini. Par exemple l'égalité

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n + 1/n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$$

n'a pas de sens. Par contre voilà ce qu'on peut dire : *Comme la suite $1/n$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, la suite u_n est convergente si et seulement si la suite $(-1)^n$ l'est. De plus, dans le cas où elles sont toutes les deux convergentes, elles ont même limite.* Cette affirmation provient tout simplement du théorème suivant

Théorème : Soient u_n et v_n deux suites convergeant vers deux limites l et l' . Alors la suite $w_n = u_n + v_n$ est convergente (on peut donc parler de sa limite) et $\lim w_n = l + l'$.

De plus, il n'est pas vrai que toute suite convergente doit forcément être croissante et majorée ou décroissante et minorée. Par exemple, $(-1)^n/n$ est une suite qui converge vers 0 mais qui n'est ni croissante, ni décroissante. A ce propos d'ailleurs, on ne dit pas d'une suite qu'elle est *croissante pour n pair et décroissante pour n impair* même si je comprends ce que cela signifie. On dit qu'une telle suite n'est ni croissante ni décroissante (et c'est tout).

Voici maintenant un exemple de rédaction de l'exercice. On veut montrer que la suite u_n n'est pas convergente. Supposons donc par l'absurde qu'elle soit convergente et notons $l = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. (Cette expression a un sens puisqu'on suppose que u_n converge).

Rappel 1. Une *sous-suite* de u_n (on dit aussi *suite extraite* de u_n) est une suite v_n de la forme $v_n = u_{\phi(n)}$ où ϕ est une application strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . Cette fonction ϕ correspond "au choix des indices qu'on veut garder" dans notre sous-suite. Par exemple, si on ne veut garder dans la suite u_n que les termes pour lesquels n est un multiple de trois, on pourra poser $\phi(n) = 3n$, c'est à dire $v_n = u_{3n}$.

Considérons maintenant les sous-suites $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$ de (u_n) . On a que $v_n = 1 + 1/2n \rightarrow 1$ et que $w_n = -1 + 1/(2n + 1) \rightarrow -1$. Or on a le théorème suivant sur les sous-suites d'une suite convergente :

Théorème : Soit u_n une suite convergeant vers la limite l (le théorème est encore vrai si $l = +\infty$ ou $l = -\infty$). Alors, toute sous suite v_n de u_n a pour limite l .

Par conséquent, ici, on a que $\lim v_n = l$ et $\lim w_n = l$ donc $l = 1$ et $l = -1$ ce qui est une contradiction. L'hypothèse disant que (u_n) était convergente est donc fausse. Donc u_n ne converge pas.

Montrons que u_n est bornée. On a que

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$$0 \leq 1/n \leq 1$$

donc

$$-1 \leq u_n \leq 2$$

donc u_n est bornée.

Rappel 2. Le théorème de Bolzano-Weierstrass dit ceci : Soit (u_n) une suite de réels bornée. Alors, il existe une sous-suite de (u_n) qui est convergente. (C'est un théorème très puissant). Ici, on nous demande d'exhiber une sous-suite de u_n qui soit convergente. Mais on a déjà vu que $v_n = u_{2n} \rightarrow 1$. $v_n = u_{2n}$ est donc une suite extraite convergente.

Remarque : Il y a d'autres sous-suites convergentes : (u_{4n}) , (u_{2^n}) , $(u_{n!})$ et (u_{3^n}) sont des sous-suites convergentes de u_n .

Correction 4 Soit $(u_n)_n$ une suite d'entiers qui converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

Dans l'intervalle $I =]\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}[$ de longueur 1, il existe au plus un élément de \mathbb{N} . Donc $I \cap \mathbb{N}$ est soit vide soit un singleton $\{a\}$.

La convergence de $(u_n)_n$ s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

Fixons $\varepsilon = \frac{1}{2}$, nous obtenons le N correspondant. Et pour $n \geq N$, $u_n \in I$. Mais de plus u_n est un entier, donc

$$n \geq N \Rightarrow u_n \in I \cap \mathbb{N}.$$

En conséquent, $I \cap \mathbb{N}$ n'est pas vide (par exemple u_N en est un élément) donc $I \cap \mathbb{N} = \{a\}$. L'implication précédente s'écrit maintenant :

$$n \geq N \Rightarrow u_n = a.$$

Donc la suite $(u_n)_n$ est stationnaire (au moins) à partir de N . En prime, elle est bien évidemment convergente vers $\ell = a \in \mathbb{N}$.

Correction 5 1. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ est décroissante sur $[n, n+1]$ donc

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{n}$$

(C'est un encadrement de l'aire de l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $x \in [n, n+1]$ et $0 \leq y \leq 1/x$ par l'aire de deux rectangles.) Nous obtenons l'inégalité :

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}.$$

2. $H_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + \frac{1}{2} + 1$, nous majorons chaque terme de cette somme en utilisant l'inégalité $\frac{1}{k} \leq \ln(k) - \ln(k-1)$ obtenue précédemment : nous obtenons $H_n \leq \ln(n) - \ln(n-1) + \ln(n-1) - \ln(n-2) + \dots + \ln 2 - \ln 1 + 1$. Cette somme est télescopique (la plupart des termes s'éliminent et en plus $\ln 1 = 0$) et donne $H_n \leq \ln n + 1$.

L'autre inégalité s'obtient de la façon similaire en utilisant l'inégalité $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

3. Comme $H_n \geq \ln(n+1)$ et que $\ln(n+1) \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$ alors $H_n \rightarrow +\infty$ quand $n \rightarrow +\infty$.
4. $u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n+1} - (\ln n + 1 - \ln n) \leq 0$ d'après la première question. Donc $u_{n+1} - u_n = f(\frac{1}{n+1}) \leq 0$. Donc $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite (u_n) est décroissante. Enfin comme $H_n \geq \ln(n+1)$ alors $H_n \geq \ln n$ et donc $u_n \geq 0$.
5. La suite (u_n) est décroissante et minorée (par 0) donc elle converge vers un réel γ . Ce réel γ est la constante d'Euler (Leonhard Euler, 1707-1783, mathématicien d'origine suisse). Cette constante vaut environ 0,5772156649... mais on ne sait pas si γ est rationnel ou irrationnel.

Correction 6 1. $u_{n+q} = \cos \frac{2(n+q)\pi}{q} = \cos \frac{2(n)\pi}{q} + 2\pi = \cos \frac{2(n+q)\pi}{q} = u_n$.

2. $u_{nq} = \cos \frac{2(nq)\pi}{q} = \cos 2n\pi = 1 = u_0$ et $u_{nq+1} = \cos \frac{2(nq+1)\pi}{q} = \cos \frac{2\pi}{q} = u_1$. Supposons, par l'absurde que (u_n) converge vers ℓ . Alors la sous-suite $(u_{nq})_n$ converge vers ℓ comme $u_{nq} = u_0 = 1$ pour tout n alors $\ell = 1$. D'autre part la sous-suite $(u_{nq+1})_n$ converge aussi vers ℓ , mais $u_{nq+1} = u_1 = \cos \frac{2\pi}{q}$, donc $\ell = \cos \frac{2\pi}{q}$. Nous obtenons une contradiction car pour $q \geq 2$, nous avons $\cos \frac{2\pi}{q} \neq 1$. Donc la suite (u_n) ne converge pas.

Correction 7 1. La fonction polynomiale $P(x) := x^3 - 3x + 1$ est continue et dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est $P'(x) = 3x^2 - 3$, qui est strictement négative sur $] -1, +1[$. Par conséquent P est strictement décroissante sur $] -1, +1[$. Comme $P(0) = 1 > 0$ et $P(1/2) = -3/8 < 0$ il en résulte grâce au théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe un réel unique $\alpha \in]0, 1/2[$ tel que $P(\alpha) = 0$.

2. Comme $f(x) - x = (x^3 - 3x + 1)/9$ il en résulte que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans $]0, 1/2[$.

3. Comme $f'(x) = (x^2 + 2)/3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit que f est strictement croissante sur \mathbb{R} . Comme $f(0) = 1/9$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, on en déduit que $f(\mathbb{R}^+) = [1/9, +\infty[$. Comme $x_1 = f(x_0) = 1/9 > 0 = x_0$, et que f est strictement croissante sur \mathbb{R}^+ , on en déduit par récurrence que $x_{n+1} > x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui prouve que la suite (x_n) est croissante.
4. Un calcul simple montre que $f(1/2) < 1/2$. Comme $0 = x_0 < 1/2$ et que f est croissante on en déduit par récurrence que $x_n < 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. D'après les questions précédentes, la suite (x_n) est croissante et majorée elle converge donc vers un nombre réel $l \in]0, 1/2]$. De plus comme $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit par continuité de f que $l = f(l)$. Comme $f(1/2) < 1/2$, On en déduit que $l \in]0, 1/2[$ et vérifie l'équation $f(l) = l$. D'après la question 2, on en déduit que $l = \alpha$ et donc (x_n) converge vers α .

Correction 8 Remarquons d'abord que $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{1-k^2}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k.k}$. En écrivant les fractions de u_n sous la cette forme, l'écriture va se simplifier radicalement :

$$u_n = \frac{(2-1)(2+1)}{2.2} \frac{(3-1)(3+1)}{3.3} \dots \frac{(k-1)(k+1)}{k.k} \frac{(k)(k+2)}{(k+1).(k+1)} \dots \frac{(n-1)(n+1)}{n.n}$$

Tous les termes des numérateurs se retrouvent au dénominateur (et vice-versa), sauf aux extrémités. D'où :

$$u_n = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n}.$$

Donc (u_n) tends vers $\frac{1}{2}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Correction 9 1. 0.

2. 1.
3. 7/30.
4. 1/2.
5. 1.
6. -3/2.
7. 1.
8. 3.
9. 1 ; 2.
10. 3/4.
11. 0.
12. 0.
13. 1/3.

Correction 10 1.

$$\begin{aligned} u_{n+1}^2 - a &= \frac{1}{4} \left(\frac{u_n^2 + a}{u_n} \right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4u_n^2} (u_n^4 - 2au_n^2 + a^2) \\ &= \frac{1}{4} \frac{(u_n^2 - a)^2}{u_n^2} \end{aligned}$$

2. Il est clair que pour $n \geq 0$ on a $u_n \geq 0$. D'après l'égalité précédente pour $n \geq 0$, $u_{n+1}^2 - a$ et comme u_{n+1} est positif alors $u_{n+1} \geq \sqrt{a}$.

Soit $n \geq 1$. Calculons le quotient de u_{n+1} par u_n : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{u_n^2} \right)$ or $\frac{a}{u_n^2} \leq 1$ car $u_n \geq \sqrt{a}$. Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ et donc $u_{n+1} \leq u_n$. La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est donc décroissante.

3. La suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et minorée par \sqrt{a} donc elle converge vers une limite $\ell > 0$. D'après la relation

$$u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{a}{u_n} \right)$$

quand $n \rightarrow +\infty$ alors $u_n \rightarrow \ell$ et $u_{n+1} \rightarrow \ell$. À la limite nous obtenons la relation

$$\ell = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{a}{\ell} \right).$$

La seule solution positive est $\ell = \sqrt{a}$. Conclusion (u_n) converge vers \sqrt{a} .

4. La relation

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2 - a)^2}{4u_n^2}$$

s'écrit aussi

$$(u_{n+1} - \sqrt{a})(u_{n+1} + \sqrt{a}) = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2(u_n + \sqrt{a})^2}{4u_n^2}.$$

Donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &= (u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{4(u_{n+1} + \sqrt{a})} \left(\frac{u_n + \sqrt{a}}{u_n} \right)^2 \\ &\leq (u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{4(2\sqrt{a})} \left(1 + \frac{\sqrt{a}}{u_n} \right)^2 \\ &\leq (u_n - \sqrt{a})^2 \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

5. Par récurrence pour $n = 1$, $u_1 - \sqrt{a} \leq 1$. Si la proposition est vraie rang n , alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \sqrt{a} &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}} (u_n - \sqrt{a})^2 \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{a}} (2\sqrt{a})^2 \left(\left(\frac{k}{2\sqrt{a}} \right)^{2^{n-1}} \right)^2 \\ &\leq 2\sqrt{a} \left(\frac{k}{2\sqrt{a}} \right)^{2^n} \end{aligned}$$

6. Soit $u_0 = 3$, alors $u_1 = \frac{1}{2} \left(3 + \frac{10}{3} \right) = 3,166\dots$. Comme $3 \leq \sqrt{10} \leq u_1$ donc $u_1 - \sqrt{10} \leq 0,166\dots$. Nous pouvons choisir $k = 0,17$. Pour que l'erreur $u_n - \sqrt{a}$ soit inférieure à 10^{-8} il suffit de calculer le terme u_4 car alors l'erreur (calculée par la formule de la question précédente) est inférieure à $1,53 \times 10^{-10}$. Nous obtenons $u_4 = 3,16227766\dots$

Correction 11 1. La suite (u_n) est strictement croissante, en effet $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$.
La suite (v_n) est strictement décroissante :

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!} \left(\frac{2}{n} - 1 \right).$$

Donc pour à partir de $n \geq 2$, la suite (v_n) est strictement décroissante.

2. Comme $u_n \leq v_n \leq v_2$, alors (u_n) est une suite croissante et majorée. Donc elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. De même $v_n \geq u_n \leq u_0$, donc (v_n) est une suite décroissante et minorée. Donc elle converge vers $\ell' \in \mathbb{R}$. De plus $v_n - u_n = \frac{1}{n!}$. Et donc $(v_n - u_n)$ tend vers 0 ce qui prouve que $\ell = \ell'$.
3. Supposons que $\ell \in \mathbb{Q}$, nous écrivons alors $\ell = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}$. Nous obtenons pour $n \geq 2$:

$$u_n \leq \frac{p}{q} \leq v_n.$$

Ecrivons cette égalité pour $n = q$: $u_q \leq \frac{p}{q} \leq v_q$ et multiplions par $q!$: $q!u_q \leq q!\frac{p}{q} \leq q!v_q$. Dans cette double inégalité toutes les termes sont des entiers ! De plus $v_q = u_q + \frac{1}{q!}$ donc :

$$q!u_q \leq q!\frac{p}{q} \leq q!u_q + 1.$$

Donc l'entier $q!\frac{p}{q}$ est égal à l'entier $q!u_q$ ou à $q!u_q + 1 = q!v_q$. Nous obtenons que $\ell = \frac{p}{q}$ est égal à u_q ou à v_q . Supposons par exemple que $\ell = u_q$, comme la suite (u_n) est strictement croissante alors $u_q < u_{q+1} < \dots < \ell$, ce qui aboutit à une contradiction. Le même raisonnement s'applique en supposant $\ell = v_q$ car la suite (v_n) est strictement décroissante. Pour conclure nous avons montré que ℓ n'est pas un nombre rationnel.

En fait ℓ est le nombre $e = \exp(1)$.

Correction 12 1. Si $u_0 \leq u_1$ alors comme f est croissante $f(u_0) \leq f(u_1)$ donc $u_1 \leq u_2$, ensuite $f(u_1) \leq f(u_2)$ soit $u_2 \leq u_3 \dots$. Par récurrence on montre que (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par a alors elle converge. Si $u_0 \leq u_1$ alors la suite (u_n) est croissante et majorée par b donc converge.

Notons ℓ la limite de $(u_n)_n$. Comme f est continue alors $(f(u_n))$ tend vers $f(\ell)$. De plus la limite de $(u_{n+1})_n$ est aussi ℓ . En passant à la limite dans l'expression $u_{n+1} = f(u_n)$ nous obtenons l'égalité $\ell = f(\ell)$.

2. La fonction f est continue et dérivable sur l'intervalle $[0, 4]$ et $f([0, 4]) \subset [0, 4]$. La fonction f est croissante (calculez sa dérivée). Comme $u_0 = 4$ et $u_1 = 3$ alors (u_n) est décroissante. Calculons la valeur de sa limite ℓ . ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ soit $4x + 5 = x(x + 3)$. Comme $u_n \geq 0$ pour tout n alors $\ell \geq 0$. La seule solution positive de $4x + 5 = x(x + 3)$ est $\ell = \frac{1 + \sqrt{21}}{2} = 2,7912 \dots$
3. Si f est décroissante alors $f \circ f$ est croissante (car $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y) \Rightarrow f \circ f(x) \leq f \circ f(y)$). Nous appliquons la première question avec la fonction $f \circ f$. La suite $(u_0, u_2 = f \circ f(u_0), u_4 = f \circ f(u_2), \dots)$ est monotone et convergente. De même pour la suite $(u_1, u_3 = f \circ f(u_1), u_5 = f \circ f(u_3), \dots)$.
4. La fonction $f(x) = (1 - x)^2$ est continue et dérivable de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Elle est décroissante sur cette intervalle. Nous avons $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \frac{1}{4}$, $u_2 = \frac{9}{16}$, $u_3 = 0,19 \dots \dots$. Donc la suite (u_{2n}) est croissante, nous savons qu'elle converge et notons ℓ_p sa limite. La suite (u_{2n+1}) est décroissante, notons ℓ_i sa limite. Les limites ℓ_p et ℓ_i sont des solutions de

l'équation $f \circ f(x) = x$. Cette équation s'écrit $(1 - f(x))^2 = x$, ou encore $(1 - (1 - x)^2)^2 = x$ soit $x^2(2 - x)^2 = x$. Il y a deux solutions évidentes 0 et 1. Nous factorisons le polynôme $x^2(2 - x)^2 - x$ en $x(x - 1)(x - \lambda)(x - \mu)$ avec λ et μ les solutions de l'équation $x^2 - 3x + 1$: $\lambda = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,3819\dots$ et $\mu = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1$. Les solutions de l'équation $f \circ f(x) = x$ sont donc $\{0, 1, \lambda, \mu\}$. Comme (u_{2n}) est croissante et que $u_0 = \frac{1}{2}$ alors (u_{2n}) converge vers $\ell_p = 1$ qui est le seule point fixe de $[0, 1]$ supérieur à $\frac{1}{2}$. Comme (u_{2n+1}) est décroissante et que $u_1 = \frac{1}{4}$ alors (u_{2n+1}) converge vers $\ell_i = 0$ qui est le seule point fixe de $[0, 1]$ inférieur à $\frac{1}{4}$.

Correction 13 1. Soient $a, b > 0$. On veut démontrer que $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Comme les deux membres de cette inégalité sont positifs, cette inégalité est équivalente à $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2$. De plus,

$$ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 2ab + b^2$$

ce qui est toujours vrai car $a^2 - 2ab + b^2$ est un carré parfait. On a donc bien l'inégalité voulue.

2. Quitte à échanger a et b (ce qui ne change pas les moyennes arithmétique et géométrique, et qui préserve le fait d'être compris entre a et b), on peut supposer que $a \leq b$. Alors en ajoutant les deux inégalités

$$a/2 \leq a/2 \leq b/2$$

$$a/2 \leq b/2 \leq b/2,$$

on obtient

$$a \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$$

De même, comme tout est positif, en multipliant les deux inégalités

$$\sqrt{a} \leq \sqrt{a} \leq \sqrt{b}$$

$$\sqrt{a} \leq \sqrt{b} \leq \sqrt{b}$$

on obtient

$$a \leq \sqrt{ab} \leq b.$$

3. Il faut avant tout remarquer que $\forall n, u_n$ et v_n sont strictement positifs, ce qui permet de dire que les deux suites sont bien définies. On le démontre par récurrence : c'est clair pour u_0 et v_0 , et si u_n et v_n sont strictement positifs alors leurs moyennes géométrique (u_{n+1}) et arithmétique (v_{n+1}) sont strictement positives.

(a) On veut montrer que $\forall n, u_n \leq v_n$. L'inégalité est claire pour $n = 0$ grâce aux hypothèses faites sur u_0 et v_0 . Si maintenant n est plus grand que 1, u_n est la moyenne géométrique de u_{n-1} et v_{n-1} et v_n est la moyenne arithmétique de u_{n-1} et v_{n-1} , donc, par 1., $u_n \leq v_n$.

(b) On sait d'après 2. que $u_n \leq u_{n+1} \leq v_n$. En particulier, $u_n \leq u_{n+1}$ i.e. (u_n) est croissante. De même, d'après 2., $u_n \leq v_{n+1} \leq v_n$. En particulier, $v_{n+1} \leq v_n$ i.e. (v_n) est décroissante.

- (c) Pour tout n , on a $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$. (u_n) est donc croissante et majorée, donc converge vers une limite l . Et (v_n) est décroissante et minorée et donc converge vers une limite l' . De plus comme $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ et puisque $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, l et l' doivent vérifier

$$l = \sqrt{ll'} \text{ et } l' = \frac{l + l'}{2}$$

d'où $l = l'$.

Il y a une autre méthode un peu plus longue mais toute aussi valable.

Définition Deux suites u_n et v_n sont dites *adjacentes* si

1. $u_n \leq v_n$,
2. u_n est croissante et v_n est décroissante,
3. $\lim(u_n - v_n) = 0$.

Alors, on a le théorème suivant :

Théorème : Si u_n et v_n sont deux suites adjacentes, elles sont toutes les deux convergentes et ont la même limite.

Pour appliquer ce théorème, vu qu'on sait déjà que u_n et v_n vérifient les points 1 et 2 de la définition, il suffit de démontrer que $\lim(u_n - v_n) = 0$. On a d'abord que $v_n - u_n \geq 0$. Or, d'après (a)

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq v_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

Donc, si on note $w_n = v_n - u_n$, on a que $0 \leq w_{n+1} \leq w_n/2$. Donc, on peut démontrer (par récurrence) que $0 \leq w_n \leq \frac{w_0}{2^n}$, ce qui implique que $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$. Donc $v_n - u_n$ tend vers 0, et ceci termine de démontrer que les deux suites u_n et v_n sont convergentes et ont même limite en utilisant le théorème sur les suites adjacentes.

Correction 14 Notons $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n x^k - 1.$$

1. La fonction f_n est continue sur $[0, 1]$. De plus $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n - 1 \geq 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, f_n , admet un zéro dans l'intervalle $[0, 1]$. De plus elle strictement croissante (calculez sa dérivée) sur $[0, 1]$ donc ce zéro est unique.
2. Calculons $f_n(a_{n-1})$.

$$\begin{aligned} f_n(a_{n-1}) &= \sum_{i=1}^n a_{n-1}^i - 1 \\ &= a_{n-1}^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_{n-1}^i - 1 \\ &= a_{n-1}^n + f_{n-1}(a_{n-1}) \\ &= a_{n-1}^n \quad (\text{car } f_{n-1}(a_{n-1}) = 0 \text{ par définition de } a_{n-1}). \end{aligned}$$

Nous obtenons l'inégalité

$$0 = f_n(a_n) < f_n(a_{n-1}) = a_{n-1}^n.$$

Or f_n est strictement croissante, l'inégalité ci-dessus implique donc

$$a_n < a_{n-1}.$$

Nous venons de démontrer que la suite $(a_n)_n$ est décroissante.

Remarquons avant d'aller plus loin que $f_n(x)$ est la somme d'une suite géométrique :

$$f_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} - 2.$$

Évaluons maintenant $f_n(\frac{1}{2})$, à l'aide de l'expression précédente

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1 - \frac{1}{2}^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} - 2 = -\frac{1}{2^n} < 0.$$

Donc $f_n(\frac{1}{2}) < f_n(a_n) = 0$ entraîne $\frac{1}{2} < a_n$.

Pour résumé, nous avons montré que la suite $(a_n)_n$ est strictement décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.

3. Comme $(a_n)_n$ est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ alors elle converge, nous notons ℓ sa limite :

$$\frac{1}{2} \leq \ell < a_n.$$

Appliquons f_n (qui est strictement croissante) à cette inégalité :

$$f_n\left(\frac{1}{2}\right) \leq f_n(\ell) < f_n(a_n),$$

qui s'écrit aussi :

$$-\frac{1}{2^n} \leq f_n(\ell) < 0,$$

et ceci quelque soit $n \geq 1$. La suite $(f_n(\ell))_n$ converge donc vers 0 (théorème des "gendarmes"). Mais nous savons aussi que

$$f_n(\ell) = \frac{1 - \ell^{n+1}}{1 - \ell} - 2;$$

donc $(f_n(\ell))_n$ converge vers $\frac{1}{1-\ell} - 2$ car $(\ell^n)_n$ converge vers 0. Donc

$$\frac{1}{1-\ell} - 2 = 0, \text{ d'où } \ell = \frac{1}{2}.$$