الاستدلال بالتراجع
المتتاليات العددية

الكفاءات المستهدفة:

- البرهان بالتراجع على صحة خاصية في حالات بسيطة.
- تبيان أنَ متتالية محدودة من الأسفل أو محدودة من أعلى أو محدودة.
- التعرف إن كانت متتالية رتيبة.
- تبيان إن كانت متتالية متقاربة.
- التعرف على متتالية معرفة بعلاقة تراجعية من الشكل $U_{n+1} = a.U_n + b$ وحساب حدودها.

فهرس الدرس

أنشطة تمهيدية

النشاط 1 : الخاصية الوراثية .

◄ **المعطيات و الأسئلة :**

1- من أجل كل عدد طبيعي n ، نرمز بالرمز $p(n)$ إلى القضية :

«$0^3+1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$»

$p(n)$) هي القضية : « مجموع مكعبات الأعداد الطبيعية، الأصغر من أو تساوي n ، يساوي $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$»

أ- أعط عبارة كل واحدة من القضايا $p(0)$ ، $p(1)$ ، $p(5)$ ، $p(6)$ ، $p(7)$ ، ثم تأكد أن كل واحدة من هذه القضايا هي قضية صحيحة.

ب- ليكن m عددا طبيعيا كيفيا ، أعط عبارة كل واحدة من القضيتين $p(m)$ ، $p(m+1)$ ثم تأكد أنه : إذا كانت القضية $p(m)$ صحيحة تكون حتما القضية $p(m+1)$ صحيحة.

2- من أجل كل عدد طبيعي n ، نسمي $Q(n)$ القصية : « 8^n+1 عدد طبيعي مضاعف للعدد 7 ».

أ- أعط عبارة كل واحدة من القضايا $Q(0)$ ، $Q(1)$ ، $Q(3)$ ثم قل عن كل منها إن كانت صحيحة أو خاطئة.

ب- ليكن m عددا طبيعيا كيفيا : أعط عبارة كل واحدة من القضيتين $Q(m)$ و $Q(m+1)$ ثم أثبت أنه إذا كانت $Q(m)$ صحيحة تكون $Q(m+1)$ كذلك صحيحة.

◄ **الأجوبـــة :**

1- أ – $p(0)$ هي : « $0^3=\frac{1}{4}.0^2.(0+1)^2$ ».

و $p(1)$ هي :« $0^3+1^3=\frac{1}{4}.1^2.(1+1)$ » .

و $p(5)$ هي: « $0^3+1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=\frac{1}{4}.5^2.(5+1)^2$ » .

و $p(6)$ هي: « $0^3+1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3=\frac{1}{4}.6^2.(6+1)^2$ ».

وبعد إنجاز الحسابات :

$p(0)$ هي « $0=0$ » و $p(1)$ هي « $1=1$ » و $p(5)$ هي « $255=255$ » و $p(6)$ هي « $441=441$ »

منه :

كل واحدة من القضايا $p(0)$ ، $p(1)$ ، $p(5)$ ، و $p(6)$ صحيحة

ب- $p(m)$ هي : $0^3+1^3+2^3+3^3+...+m^3=\frac{1}{4}m^2(m+1)^2$

$p(m+1)$ هي:

$$0^3+1^3+2^3+3^3+...+m^3+(m+1)^3=\frac{1}{4}(m+1)^2(m+2)^2$$

إذا كانت $p(m)$ صحيحة تكون المساواة

$0^3+1^3+...+m^3=\frac{1}{4}.m^2.(m+1)^2$ ...(α) صحيحة.

وبما أن المساواة $0^3+1^3+...+(m+1)^3=(0^3+1^3+...+m^3)+(m+1)^3$ ...(β) صحيحة.

من صواب (α) يمكننا تعويض $(0^3+1^3+...+m^3)$ بـ $\frac{1}{4}.m^2.(m+1)^2$ وتبقى (β) صحيحة.

وتكون المساواة صحيحة.:

$$0^3+1^3+2^3+3^3+...+m^3+(m+1)^3=\frac{1}{4}.m^2.(m+1)^2(m+1)^3$$

وتكون المساواة صحيحة:

$$0^3+1^3+2^3+3^3+...+m^3+(m+1)^3=(m+1)^2.\left(\frac{1}{4}.m^2.(m+1)\right)$$

وتكون المساواة صحيحة.:

$$0^3+1^3+2^3+3^3+...+m^3+(m+1)^3=(m+1)^2.\left(\frac{m^2+4m+4}{4}\right)$$

وتكون المساواة :

$$0^3+1^3+2^3+3^3+...+m^3+(m+1)^3=(m+1)^2.\frac{1}{4}.(m+2)^2$$ وتكون

$p(m+1)$ قضية صحيحة.

وعليه :

مهما يكون العدد الطبيعي m ، إذا كانت $p(m)$ صحيحة تكون حتما $p(m+1)$ صحيحة.

2- أ- $Q(0)$ هي : « 8^0+1 عدد طبيعي مضاعف للعدد 7 » ، $Q(1)$ هي « 8^1+1 عدد طبيعي مضاعف للعدد 7 » $Q(3)$ هي « 8^3+1 عدد طبيعي مضاعف للعدد 7 ».

إذن $Q(0)$ هي « 2 مضاعف للعدد 7 » و $Q(1)$ هي « 9 مضاعف للعدد 7 »

و $Q(3)$ هي « 512 مضاعف للعدد 7 » و **كل واحدة من القضايا $Q(0)$ و $Q(1)$ و $Q(3)$ خاطئة**

ب- $Q(m)$ هي « 8^m+1 مضاعف للعدد 7 » و $Q(m+1)$ هي « $8^{m+1}+1$ مضاعف للعدد 7 » وإذا كانت $Q(m)$ صحيحة يكون $8^m+1=7k$ حيث k عدد طبيعي .

وبما أن $8^{m+1}=8^m\times 8$ أي $8^{m+1}=8^m+7\times 8^m$.

يكون $8^{m+1}+1=8^m+7\times 8^m+1$ ويكون $8^{m+1}=8^m+7\times 8^m$ ويكون $8^{m+1}=7\times k+7\times 8^m$ ويكون $8^{m+1}=7\times\left(k+8^m\right)$ وبما أن $\left(k\times 8^m\right)$ عدد طبيعي يكون « $8^{m+1}+1$ مضاعف للعدد 7 » وتكون $Q(m+1)$ قضية صحيحة.

وعليه : | مهما يكون العدد الطبيعي m : إذا كانت $Q(m)$ صحيحة تكون $Q(m+1)$ |

◄ الملاحظة :

- في السؤال 1 عندما أرفقنا بكل عدد طبيعي n القضية $p(n)$ لقد عرفنا « الخاصية p » على مجموعة الأعداد الطبيعية وللتعبير على : « مهما يكون العدد الطبيعي m صواب $p(m)$ يؤدي حتما إلى صواب $p(m+1)$ » نقول أن « الخاصية p المعرفة على $\mathbb{N}$ ، وراثية»

- وهكذا في السؤال 2 لقد عرفنا الخاصية Q على مجموعة الأعداد الطبيعية ومن خلال جوابنا على السؤال الأخير نستنتج أن الخاصية Q، المعرفة على $\mathbb{N}$ ، وراثية.

بصورة عامة :

إذا كان n_0 عددا طبيعيا مفروضا وكانت E مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من أو تساوي n_0 :
عندما نرفق بكل عنصر n من E قضية $p(n)$ نقول أننا عرفنا خاصية p على المجموعة E ، وإذا برهنا أنه : « مهما يكون العنصر m من E فإن صواب $p(m)$ يؤدي حتما إلى صواب $p(m+1)$ » نقول أن الخاصية p ، المعرفة على E ، وراثية.

وستعمل بهذه المصطلحات عند تناولنا « مبدأ البرهان بالتراجع ».

النشاط 2: دراسة متتالية معرفة بحدها العام.

◄ **المعطيات و الأسئلة :**

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-1\,;+\infty[$ بالدستور

$$f(x)=2-\frac{3}{x+1}$$

1- أدرس تغيرات الدالة f .

2- لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة ، على $\mathbb{N}$ ، بحدها العام $U_n=2-\frac{3}{n+1}$.

أ- أدرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

ب- أثبت أنه : مهما يكون العدد الطبيعي n فإن $U_n<2$ و $U_n\geq -1$.

جـ- ماذا يمكننا أن نقول عن قيم العدد الحقيقي U_n عندما العدد الطبيعي n يأخذ قيما كبيرة جدًا جدًا جدًا ...؟

◄ **الأجوبـــة :**

1- مجموعة تعريف f هي $]-1\,;+\infty[$ (معطى)

$\lim_{+\infty}\left(x \to \frac{3}{x+1}\right)=0$ منه $\lim_{+\infty} f = 2$ و $\lim_{-1^+}\left(x \to \frac{3}{x+1}\right)=+\infty$ و

. $\lim_{-1^+} f = -\infty$

f' الدالة المشتقة للدالة f معرفة على $]-1\,;+\infty[$ بالدستور $f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$ منه

مهما تكون قيمة x في $]-1\,;+\infty[$ ، $f'(x)>0$ وعليه الدالة ب متزايدة تماما على $]-1\,;+\infty[$ وجدول تغيرات الدالة f يكون كما يلي :

x	$-\infty$	-1
إشارة $f'(x)$ تغ ات		$-$ ↗

2- مهما يكون العدد الطبيعي n ، لدينا $n \in]-1\,;+\infty[$ و $U_n = f(n)$.

أ- مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$: كل من n و $(n+1)$ أكبر تماما من -1 .

منه $n \in]-1\,;+\infty[$ و $(n+1) \in]-1\,;+\infty[$ و $n < n+1$ والدالة f متزايدة تماما على $]-1\,;+\infty[$

منه $f(n) < f(n+1)$ منه $f(n+1) - f(n) > 0$.

وعليه : مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$ ، $U_{n+1} - U_n > 0$ وبالتالي : **المتتالية (U_n) متزايدة تماما**

ب- مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$ ، $U_n = 2 - \dfrac{3}{n+1}$ و $\dfrac{3}{n+1} > 0$ منه $\dfrac{-3}{n+1} < 0$ منه

$$2 + \left(\frac{-3}{n+1}\right) < 2$$

منه : $U_n < 2$ (ومنه $U_n \leq 2$).

كذلك $n \geq 0$ وكل من n و 0 ينتميان إلى المجال $]-1\,;+\infty[$ و f متزايدة تماما على $]-1\,;+\infty[$

منه $f(n) \geq f(0)$ و $f(0) = -1$ ، وبالتالي مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$: $U_n \geq -1$

وعليه : **مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$: $U_n < 2$ و $U_n \geq -1$**

جـ- من حساب نهايات الدالة f : عندما x يأخذ قيما موجبة كبيرة جدًا جدًا ...

قيم $f(x)$ قريبة جدًا جدًا ... من 2 .

وبما أن مهما يكون n في $\mathbb{N}$ فإنّ $U_n = f(n)$ نستطيع أن نقول أنه : عندما n يأخذ قيما كبيرة جدًا جدًا ... جدًا ... فإن قيم U_n تكون قريبة جدًا ، جدًا ... من 2 .

◄ **الملاحـظـة :**

• للتعبير عن كون : « مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$ فإنّ $U_n \geq -1$ » نقول أن « المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل ويحدّها من الأسفل العدد الحقيقي الثابت -1 ».

وللتعبير على كون : « مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$ فإنّ $U_n \leq 2$ » نقول أن « المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى ويحدها من الأعلى العدد الحقيقي الثابت 2 ».

• للتعبير على كون « عندما n يأخذ قيما كبيرة جدًا جدًا ... تكون قيم (U_n) قريبة جدًا جدًا ... من 2 » نقول أن « نهاية المتتالية (U_n) هي 2 » ونكتب « $\lim_{n\to+\infty} U_n = 2$ »

• لدراسة سلوك متتالية عددية (U_n) معرفة بحدها العام $U_n = f(n)$ حيث f دالة عددية لمتغير حقيقي يمكننا الاعتماد على سلوكات الدالة f .

النشاط 3: المتتاليات التي تحقق علاقة تراجعية من الشكل $U_{n+1} = aU_n + b$.

◄ **المعطيات و الأسئلة :**

ليكن a و b عددين حقيقيين مفروضين بحيث : $a \neq 0$ و $a \neq 1$ لتكن (U_n) متتالية عددية بحيث مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$ ، $U_{n+1} = aU_n + b$.

ولتكن (W_n) متتالية عددية هي كذلك تحقق : مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$: $W_{n+1} = aW_n + b$.

1- برهن أن المتتالية (V_n) المعرفة بـ: مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$: $V_n = U_n - W_n$ هي متتالية هندسية.

2- متى تكون المتتالية (W_n) ثابتة ؟

3- استنتج عبارة الحد العام (U_n) بدلالة U_0، a ، b (والعدد الطبيعي n).

◄ **الأجوبـة :**

1- مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$: $V_n = U_n - W_n$ و $V_{n+1} = U_{n+1} - W_{n+1}$.

منه : $V_{n+1} = (aU_n + b) - (aW_n + b)$ ومنه $V_{n+1} = a(U_n - W_n)$.

وعليه : مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$: $V_{n+1} = aV_n$ وبالتالي :

(V_n) متتالية هندسية أساسها a

2- حتى تكون (W_n) ثابتة يلزم ويكفي أن يكون :

مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$: $W_{n+1} - W_n = 0$.

أي مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$: $aW_n + b - W_n = 0$.

أي مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$: $W_n(a-1) = -b$.

منه : حتى تكون (W_n) ثابتة يلزم ويكفي أن تكون (W_n) معرفة بحدّها العام $W_n = \frac{b}{1-a}$

3- من نتائج الأجوبة على السؤالين 1 و 2 :

المتتالية (W_n) المعرفة بحدها العام : $W_n = \frac{b}{1-a}$ تحقق العلاقة التراجعية : $W_{n+1} = aW_n + b$.

منه المتتالية (V_n) المعرفة بـ : مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$: $V_n = U_n + W_n$ ... (1)

متتالية هندسية ذات الأساس a ومنه حدها العام V_n ، بحيث : $V_n = V_0 + a^n$ ولدينا

$V_0 = U_0 + W_0$ منه $V_0 = U_0 - \frac{b}{1-a}$ وعليه مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$:

$V_0 = \left(U_0 - \frac{b}{1-a}\right).a^n$.

ومن (1) يكون الحد العام للمتتالية (U_n) بحيث $U_0 = \underbrace{\left(U_0 - \frac{b}{1-a}\right).a^n}_{V_n} + \underbrace{\frac{b}{1-a}}_{W_n}$.

◄ **الملاحـظـة :**

• المتتاليات العددية (U_n) التي تحقق علاقة تراجعية من الشكل : $U_{n+1} = aU_n + b$ تستعمل كثيرا في أوضاع عملية مثل تزايد السكان أو الفوائد عند القرض أو الاستثمار وفي هذا النشاط ، لقد رأينا كيف نحدد الحد العام لهذا النوع من المتتاليات.

I - البرهان بالتراجع :

البرهان بالتراجع هو نمط من أنماط يمكن من البرهنة على صواب خاصية تتعلق بعدد طبيعي n ، من أجل كل قيم n الأكبر من أو تساوي عدد طبيعي مفروض n_0 .

يعتمد البرهان بالتراجع على المبدأ التالي :

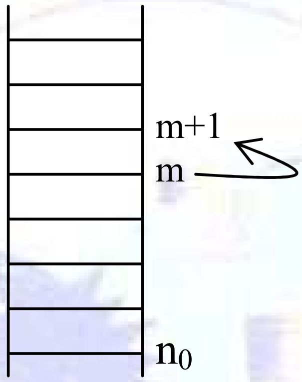
مبدأ البرهان بالتراجع (بديهية) :

ليكن n_0 عددا طبيعيا مفروضا ولتكن p خاصية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من أو تساوي n_0 .

لكي نبرهن –بالتراجع- على أن $p(n)$ قضية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n بحيث $n \geq n_0$ ، يكفي أن نبرهن على ما يلي :

1- $p(n_0)$ قضية صحيحة (مرحلة الابتداء).

2- من أجل كل عدد طبيعي m بحيث $m \geq n_0$ ، صواب $p(m)$ يؤدي إلى صواب $p(m+1)$ (الخاصية p وراثية)



عمليا، يمكن تشبيه برهانا بالتراجع بعملية صعود سلّم ، انظر إلى الشكل:

لكي أستطيع أن أتسلق السلم كاملا بدءا من الدرجة n_0 يكفي:

1- أضمن صعودي على الدرجة n_0 .

2- أستطيع الانتقال من درجة كيفية إلى الدرجة الموالية لها .

مثال : لنبرهن بالتراجع أنه مهما يكون العدد الطبيعي n فإن $2^n \geq n+1$.

من أجل كل عدد طبيعي n ، لنسمي $p(n)$ القضية $2^n \geq n+1$.

1- **مرحلة الابتداء** : هنا $n_0 = 0$ (لأن مهما يكون العدد الطبيعي n يعني مهما يكون n في $\mathbb{N}$ بحيث $n \geq 0$).

$p(0)$ هي القضية : $2^0 \geq 0+1$ وهي القضية $1 \geq 1$ وهي صحيحة (1) ، منه $p(0)$ صحيحة.

2- البرهان على أن الخاصية p وراثية:

(كذلك نأخذ عدد طبيعي كيفي n نفرض $p(m)$ صحيحة ونبرهن $p(m+1)$ صحيحة.)

لنأخذ m عدد طبيعي كيفي ولنفرض $p(m)$ صحيحة أي نفرض $2^m \geq m+1$ ولنبرهن أن $p(m+1)$ صحيحة أي لنبرهن أن : $2^{m+1} \geq m+2$.

البرهان : لدينا فرضا $2^m \geq m+1$

منه $2 \times 2^m \geq 2(m+1)$ (لأن $2 > 0$)

منه $2^{m+1} \geq 2m+2$

وبما أن $2m+2 \geq m+2$ لأن ($(2m+2)-(m+2) = m$ و $m \geq 0$)

يكون : $2^{m+1} \geq m+2$

وتكون: $p(m+1)$ صحيحة.

منه صواب $p(m)$ يؤدي إلى صواب $p(m+1)$ (من أجل كل عدد طبيعي m)

وعليه الخاصية p وراثية (2).

3- الخاتمة:

من (1): $p(0)$ قضية صحيحة .

من (2): الخاصية p وراثية.

منه وحسب مبدأ البرهان بالتراجع :

مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$: $p(m)$ قضية صحيحة أي $2^n \geq n+1$ قضية صحيحة.

←طريقة : للبرهنة على أن الخاصية p وراثية ، نأخذ عدد طبيعي m كيفي أكبر من أو يساوي n_0 نفرض $p(m)$ صحيحة ونبرهن $p(m+1)$ صحيحة.

II – عموميات على المتتاليات العددية : (مراجعة وتتميمات)

1- تعريف اصطلاحات (تذكير):

تعريف : نسمي متتالية عددية كل دالة عددية مجموعة تعريفها هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من أو تساوي عدد طبيعي مفروض α. (★)

(★) تقتصر الدراسة على هذا النوع من «المتتاليات» مثل ما هو معمول به في التعليم الثانوي.

اصطلاحات :

إذا كانت U متتالية عددية مجموعة تعريفها D ، مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من أو تساوي عدد طبيعي مفروض α.

- يرمز إلى صورة عنصر p ، من D ، بالدالة U_p بدلا من الرمز $U(p)$.
- يرمز إلى المتتالية U (أي إلى الدالة U في حد ذاتها) بالرمز (U_n) أو بالرمز $(U_n)_{n\in D}$
- مهما يكون العنصر p من D ، العدد الحقيقي U_p يصمن الحد ذو الدليل p للمتتالية (U_n) .
- العدد الحقيقي U_α يسمى الحد الأول للمتتالية (U_n) .
- « U_n ، بدلالة n » يسمى الحد العام للمتتالية (U_n) .

2- تحديد متتالية عددية (أو توليد حدود متتالية عددية):

الطريقتان الأكثر استعمالا لتحديد متتالية عددية (U_n) – أو لتوليد حدودها – بعد تحديد مجموعة تعريفها D هما :

الطريقة الأولى : إعطاء عبارة الحد العام للمتتالية (U_n).

الطريقة الثانية : الإعطاء المحكم لحد أو حدين أو عدة حدود من المتتالية (U_n) و « علاقة تراجعية » وهي علاقة تمكن من إيجاد كل حد من الحدود غير المعطاة للمتتالية (U_n) بالرجوع إلى حدود سبقت معرفتها . وفي هذه الحالة نقول أن المتتالية (U_n) هي متتالية تراجعية.

3- رتابة متتالية عددية :

أ- تعاريف : (تذكير)

القول	(U_n) متزايدة	(U_n) متناقصة	(U_n) ثابتة	(U_n) متزايدة تماما	(U_n) متناقصة تماما
يعني مهما يكون العنصر n من D	$U_{n+1}-U_n \geq 0$	$U_{n+1}-U_n \leq 0$	$U_{n+1}-U_n = 0$	$U_{n+1}-U_n > 0$	$U_{n+1}-U_n < 0$

لتكن (U_n) متتالية عددية مجموعة تعريفها $\mathbb{D}$.

- القول « (U_n) رتيبة » يعني : « (U_n) متزايدة أو (U_n) متناقصة أو (U_n) ثابتة »
- القول « (U_n) رتيبة تماما » يعني : « (U_n) متزايدة تماما أو (U_n) متناقصة تماما »

ب- ملاحظة :

دراسة اتجاه تغير (أو دراسة تغيرات أو دراسة رتابة) متتالية عددية (U_n) يعني الحكم عن المتتالية (U_n) إن هي متزايدة أو متناقصة أو ثابتة أو متزايدة تماما أو متناقصة تماما أو غير رتيبة وهذا مع التعليل.

جـ - مبرهنة : (مقبولة)

لتكن (U_n) متتالية عددية موعة تعريفها $\mathbb{D}$:

	مهما يكون العنصران p و q من $\mathbb{D}$.
إذا كانت (U_n) متزايدة.	إذا كان $q \geq p$ يكون $U_q \geq U_p$
إذا كانت (U_n) متناقصة.	إذا كان $q \geq p$ يكون $U_q \leq U_p$
إذا كانت (U_n) متزايدة اما.	إذا كان $q > p$ يكون $U_q > U_p$
إذا كانت (U_n) متناقصة اما.	إذا كان $q > p$ يكون $U_q < U_p$
إذا كانت (U_n) ثابتة.	$U_q = U_p$

د- طرائق وأمثلة :

• الطريقة « الدالية » :

لتكن (U_n) متتالية عددية مجموعة تعريفها $\mathbb{D}$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من أو تساوي العدد الطبيعي المفروض α.

إذا كانت (U_n) معرفة بحدها العام $U_n = f(n)$ حيث f دالة عددية لمتغير حقيقي مجموعة تعريفها تحتوي المجال $]\alpha ;+\infty[$ وكانت الدالة f رتيبة على هذا المجال يمكننا استنتاج رتابة المتتالية (U_n) .

مثلا : أنظر إلى النشاط 2.

• الطريقة الجبرية :

لتكن (U_n) متتالية عددية مجموعة تعريفها $\mathbb{D}$.

لدراسة اتجاه تغير المتتالية (U_n) بالطريقة الجبرية :

نأخذ n كيفي في المجموعة $\mathbb{D}$ ونقارن U_n و U_{n+1} ولذلك يمكن دراسة إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$.

وفي حالة ما تكون جميع حدود المتتالية (U_n) موجبة تماما.

يمكننا مقارنة حاصل القسمة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و العدد 1 .

مثلا :

لندرس اتجاه تغير المتتالية $(U_n)_{n\geq 2}$ المعرفة بحدها العام : $U_n = \frac{5^n}{(n-1)^2}$

مجموعة تعريف المتتالية (U_n) هي $\mathbb{N}^* - \{1\}$ وجميع حدود (U_n) موجبة تماما.

مهما يكون العنصر n من $\mathbb{D}$ ،

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{5^{n+1}}{n^2} \times \frac{(n-1)^2}{5^n} = 5\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 = \left(\sqrt{5}.\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)^2 .$$

ومقارنة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1 تعود إلى مقارنة جذريها التربيعيين أي :

إلى مقارنة $\frac{\sqrt{5}(n-1)}{n}$ و 1 ولدينا $\frac{\sqrt{5}(n-1)}{n} - 1 = \frac{n(\sqrt{5}-1)-\sqrt{5}}{n}$ و $n \geq 2$ و $\sqrt{5}-1>0$

منه : $n(\sqrt{5}-1) \geq 2(\sqrt{5}-1)$ منه $n(\sqrt{5}-2)-\sqrt{5} \geq \sqrt{5}-2$ ومنه $n(\sqrt{5}-1)-\sqrt{5}>0$ و $n\geq 2$ منه $\frac{\sqrt{5}(n-1)}{n}-1>0$ منه $\frac{U_{n+1}}{U_n}>1$ وبما أن $U_n>0$ يكون $U_{n+1}>U_n$ منه $U_{n+1}-U_n>0$

وعليه المتتالية (U_n) متزايدة تماما .

- **الطريقة بالتراجع :**

لتكن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

لدينا $U_0 = 4$, $U_1 = 3$, $U_2 = \sqrt{7}$ يبدو وكأنه (U_n) متناقصة تماما.

لنبرهن – بالتراجع – أنه: مهما يكون n في $\mathbb{N}$ (أي n في $\mathbb{N}$ و $n\geq 0$) فإن U_n و U_{n+1} عددان حقيقيان موجبان: $U_{n+1} < U_n$.

نعتبر الخاصية p المعرفة على $\mathbb{N}$ بما يلي: $p(n)$ هي $0 \leq U_{n+1} < U_n$.

1- **مرحلة الابتداء:**

$p(0)$ هي $0 \le U_1 < U_0$ وهي قضية صحيحة لأن $0 \le 3 < 4$.

2- **البرهان على أن الخاصية p وراثية:**

ليكن m عددا طبيعيا كيفيا لنفرض $p(m)$ صحيحة أي نفرض $0 \le U_{m+1} < U_m$ ولنبرهن $p(m+1)$ صحيحة أي لنبرهن $0 \le U_{m+2} < U_{m+1}$.

البرهان : لدينا فرضا : $0 \le U_{m+1} < U_m$

منه : $1 \le 2U_{m+1} + 1 < 2U_m + 1$ (يضرب طرفي كل واحدة من المتباينتين السابقتين في 2 وإضافة 1 قصد إبراز U_{n+2})

منه $1 \le \sqrt{2U_{m+1} + 1} < \sqrt{2U_m + 1}$

ويكون : $0 \le U_{m+2} < U_{m+1}$، وتكون $p(m+1)$ صحيحة .

وعليه الخاصية p وراثية.

3- **الخاتمة :**

$p(0)$ صحيحة والخاصية p وراثية منه وحسب مبدأ البرهان بالتراجع مهما يكون n في $\mathbb{N}$: $p(m)$ صحيحة.

إذن مهما يكون n في $\mathbb{N}$، $U_{n+1} - U_n < 0$ وبالتالي : المتتالية (U_n) متناقصة تماما .

4- **المتتالية المحدودة من الأعلى، المتتالية المحدودة من الأسفل :**

تعاريف :

لتكن (U_n) متتالية مجموعة تعريفها $\mathbb{D}$.

• القول « المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى » يعني « يوجد عدد حقيقي ثابت M بحيث مهما تكون قيمة n من $\mathbb{D}$: $U_n \le M$ » وعندئذ M يسمى عنصرًا حادًا من الأعلى للمتتالية (U_n).

• القول « المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل » يعني « يوجد عدد حقيقي ثابت m بحيث مهما تكون قيمة n من $\mathbb{D}$: $U_n \ge m$ » وعندئذ m يسمى عنصرًا حادًا من الأسفل للمتتالية (U_n).

• القول « المتتالية (U_n) محدودة » يعني «(U_n) محدودة من الأعلى و (U_n) محدودة من الأسفل » أي «يوجد عددان حقيقيان ثابتان m و M بحيث مهما تكون قيمة n من $\mathbb{D}$: $m \leq U_n \leq M$ ».

مثال 1 : انظر النشاط 2.

مثال 2 : المتتالية العددية $(U_n)_{n \in N}$ المعرفة بحدها العام $U_n = \cos n$ محدودة لأن مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$: $-1 \leq \cos n \leq 1$.

III – المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية والمتتاليات التراجعية حيث : $U_{n+1} = aU_n + b$.

1 - المتتاليات الحسابية : (تذكير)

تعريف : لتكن (U_n) متتالية عددية مجموعة تعريفها ط.

القول : « (U_n) متتالية حسابية » يعني « يوجد عدد حقيقي ثابت r بحيث ، مهما تكون قيمة n من $\mathbb{D}$: $U_{n+1} = U_n + 1$» وعندئذ r يسمى أساس المتتالية الحسابية (U_n).

خواص :

لتكن (U_n) متتالية عددية مجموعة تعريفها $\mathbb{D}$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من أو تساوي عددًا طبيعيا مفروضًا α.

إذا كانت (U_n) متتالية حسابية ذات الأساس العدد الحقيقي الثابت r لدينا:

• مهما يكون العنصران p و q من $\mathbb{D}$: $U_p = U_k + (p-k)r$

• مهما يكون العنصر n من $\mathbb{D}$: $U_n = U_\alpha + (n-\alpha)r$ (عبارة الحد العام).

وبالأخص :

- إذا كان $\alpha = 0$ (أي $\mathbb{D} = \mathbb{N}$) : مهما يكون n في $\mathbb{N}$: $U_n = U_0 + n.r$.

- إذا كان $\alpha = 1$ (أي $\mathbb{D} = \mathbb{N}^*$) : مهما يكون n في $\mathbb{N}^*$: $U_n = U_1 + (n-1)r$.

• مهما يكون العنصران p و k من $\mathbb{D}$ بحيث $k \geq p$:
$U_p + U_{p+1} + ... + U_k = \frac{1}{2}(k-p+1)(U_p + U_k)$ (مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية).

• مهما يكون العنصر p من $\mathbb{D}$: $U_p + U_{p+2} = 2U_{p+1}$ (U_{p+2} هو الوسط الحسابي للعددين U_p و U_{p+1}).

2- المتتاليات الهندسية : (تذكير)

تعريف :

لتكن (U_n) متتالية عددية مجموعة تعريفها $\mathbb{D}$.

القول « (U_n) متتالية هندسية » يعني « يوجد عدد حقيقي ثابت q بحيث مهما يكون العنصر n من $\mathbb{D}$: $U_{n+1} = q.U_n$» وعندئذ q يسمى أساس المتتالية الهندسية (U_n).

خواص :

لتكن (U_n) متتالية عددية مجموعة تعريفها $\mathbb{D}$ هي مجموعة الأعداد الطبيعية الأكبر من أو تساوي عددًا طبيعيا مفروضًا α.

إذا كانت (U_n) متتالية هندسية ذات الأساس العدد الحقيقي الثابت q لدينا :

• مهما يكون العنصر p من $\mathbb{D}$: $U_{p+2} \times U_p = U_{p+1}^2$ (U_{p+1} وسط هندسي للعددين U_p و U_{p+2})

- في حالة ما يكون $q \neq 0$:

• مهما يكون العنصران p و k من $\mathbb{D}$: $U_p = U_k.q^{n-k}$.

• مهما يكون العنصر n من $\mathbb{D}$: $U_n = U_\alpha.q^{n-\alpha}$ (عبارة الحد العام).

وبالأخص :

- إذا كان $\alpha = 0$ (أي $\mathbb{D} = \mathbb{N}$): مهما يكون n في $\mathbb{N}$: $U_n = U_0.q^n$

- إذا كان $\alpha = 1$ (أي $\mathbb{D} = \mathbb{N}^*$): مهما يكون n في $\mathbb{N}^*$: $U_n = U_1.q^{n-1}$

- في حالة ما يكون : $q \neq 1$

• مهما يكون العنصران p و k من $\mathbb{N}$ بحيث $k \geq p$:
$U_p + U_{p+1} + ... + U_k = U_p . \frac{1-q^{k-p+1}}{1-q}$ (مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية).

3- المتتاليات التي تحقق علاقة تراجعية من الشكل: $U_{n+1} = aU_n + b$

مبرهنة :
ليكن a و b عددين حقيقيين مفروضين ولتكن (U_n) متتالية عددية ، مجموعة تعريفها $\mathbb{N}$ ، تحقق : مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$: $U_{n+1} = aU_n + b$.

• إذا كان $a = 1$: تكون (U_n) متتالية حسابية ذات الأساس a .

•• إذا كان $a = 0$: تكون جميع حدود المتتالية (U_n) ، ما عادا ربما حدها الأول ، تساوي b .

••• إذا كان $a \neq 0$ و $a \neq 1$: فإن المتتالية $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بالدستور $V_n = U_n - \frac{b}{1-a}$ هي متتالية هندسية ذات الأساس a .

البرهان :

• بديهي.

•• بديهي.

••• أنظر إلى النشاط 3.

مثال: لتكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 3U_n + 5 \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

المتتالية (V_n) بحيث : $V_n = U_n - \frac{5}{1-3}$ هي متتالية هندسية ذات الأساس في حدها الأول

$$V_0 = U_0 - \frac{5}{2}$$

أي $V_0 = 2 - \frac{5}{2}$ أي $V_0 = \frac{9}{2}$ منه $V_n = \frac{9}{2}.3^n$ (حسب المبرهنة حول الحد العام لمتتالية هندسية) .

وبما أن : $V_n = U_n - \frac{5}{2}$ تكون عبارة الحد العام للمتتالية U_n كالتالي:

$$U_n = \frac{9}{2}.3^n - \frac{5}{2}$$

IV – نهاية متتالية عددية:

1 - مفهوم نهاية متتالية عددية:

• « دراسة نهاية متتالية عددية (U_n) » يعني الاهتمام بسلوك حدود هذه المتتالية عندما الدليل n يؤول إلى ∞ + أي لما n يأخذ قيما (طبيعية) كبيرة جدًا جدًا .... وأكثر فأكثر .

• لتكن (U_n) متتالية عددية مجموعة تعريفها $\mathbb{D}$.

القول	يعني	ويرمز إلى هذا القول كما يلي
نهاية (U_n) هي l حيث l عدد حقيقي.	من أجل كل قيم n (في $\mathbb{D}$) الكبيرة جدًا جدًا ... وأكثر فأكثر تكون قيم U_n قريبة جدًا جدًا ... وأكثر فأكثر من العدد الحقيقي l.	$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$
نهاية (U_n) هي ∞ +.	من أجل كل قيم n (في $\mathbb{D}$) الكبيرة جدًا جدًا ... وأكثر فأكثر تكون قيم U_n كبيرة جدًا جدًا ... وأكثر فأكثر بالقيمة المطلقة وهي موجبة.	$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$
نهاية (U_n) هي ∞ -.	من أجل كل قيم n (في $\mathbb{D}$) الكبيرة جدًا جدًا ... وأكثر فأكثر تكون قيم U_n كبيرة جدًا جدًا ... وأكثر فأكثر بالقيمة المطلقة وهي سالبة.	$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

• **يمكن ألا توجد نهاية لمتتالية عددية :**

2- تعريف:

لتكن (U_n) متتالية عددية :

القول « (U_n) متقاربة » يعني « يوجد عدد حقيقي l بحيث $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$ »

القول « (U_n) متباعدة » يعني « $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$ أو $\lim_{n\to+\infty} U_n = -\infty$ أو لا توجد نهاية للمتتالية (U_n) »

3- مبرهنات (مقبولة):

★ **نهاية متتالية حدها العام q^n أين q عدد حقيقي ثابت و n متغير طبيعي :**

ليكن q عددا حقيقيا ثابتا . دراسة نهاية المتتالية التي حدها العام q^n، حيث n متغير طبيعي ، تعتمد على ما يلي:

• إذا كان $q > 1$ يكون: $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

• إذا كان $q = 1$ يكون: $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$

• إذا كان $-1 < q < 1$ يكون: $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$

• إذا كان $q \leq -1$ فإنه لا توجد نهاية للمتتالية (U_n) المعرفة بحدها العام: $U_n = q^n$.

مثالان : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{2}\right)^n = +\infty$ لأن $\frac{5}{2}$ ثابت و $\frac{5}{2} > 1$

$\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ لأن $-\frac{2}{3}$ ثابت و $-1 < -\frac{2}{3} < 1$.

★ **نهاية متتالية (U_n) معرفة بحدها العام $U_n = f(n)$ حيث f دالة :**

إذا كانت (U_n) متتالية معرفة بحدها العام $U_n = f(n)$ فإن نهاية المتتالية (U_n) هي نهاية الدالة f عند $+\infty$.

مثلا : $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$

.

★ النهايات والعمليات على المتتاليات :

المبرهنات حول نهاية مجموع دالتين ، جداء دالتين ، حاصل قسمة دالة على دالة عندما المتغير الحقيقي x يؤول إلى $\infty +$ تطبق على مجموع متتاليتين ، جداء متتاليتين ، حاصل قسمة متتالية على متتالية ، لما المتغير الطبيعي n يؤول إلى $\infty +$ ، على الترتيب.

مثلا :

• لتكن $(U_n)_{n\in N}$ المتتالية العددية المعرفة بحدها العام:

$U_n=2+\frac{3}{n^2+1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

لدينا $\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n^2+1}=0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{3}{n^2+1}\right)=2$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ لأن

$\frac{1}{2}$ ثابت و $-1<\frac{1}{2}<1$

منه $\lim_{n\to+\infty}U_n=2$ وعليه المتتالية (U_n) متقاربة وتتقارب من 2 .

• لتكن $(V_n)_{n\in N^*}$ المتتالية العددية المعرفة بحدها العام $V_n=\frac{1}{n}+2+3^n$.

لدينا $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$ و $\lim_{n\to+\infty}2n=+\infty$ و $\lim_{n\to+\infty}3^n=+\infty$ لأن 3 ثابت و $3>1$.

منه $\lim_{n\to+\infty}V_n=+\infty$ والمتتالية (V_n) متباعدة.

★ نهاية مركبة متتالية بدالة :

لتكن (U_n) متتالية ولتكن f دالة .

إذا كان $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lambda$ حيث λ يمثل عدد حقيقي l أو $+\infty$ أو $-\infty$.
وكان $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = \gamma$ حيث γ يمثل عدد حقيقي l' أو $+\infty$ أو $-\infty$.

مثلا : لتكن $(V_n)_{n\ni N^*}$ المتتالية العددية المعرفة بحدها العام :

$V_n = \sqrt{9 + \frac{1}{n^2}}$.

لدينا $V_n = f(U_n)$ حيث $U_n = 9 + \frac{1}{n^2}$ و f الدالة بحيث : $f(x) = \sqrt{x}$

لدينا $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 9$ و $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 3$ منه : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 3$.

وعليه المتتالية (V_n) متقاربة وتتقارب من العدد الحقيقي 3 .

★ **نهايات بالمقارنة:**

في المبرهنات الموالية (U_n)، (V_n)، (W_n) متتاليات عددية :

• **مبرهنة الحد من الأسفل :**

إذا وجد عدد طبيعي n_0 بحيث من أجل كل n بحيث $n \geq n_0$ ، $U_n \geq V_n$
وكان $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$
فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

• **مبرهنة الحد من الأعلـى :**

إذا وجد عدد طبيعي n_0 بحيث من أجل كل n بحيث $n \geq n_0$ ، $U_n \geq V_n$
وكان $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -\infty$
فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$

• **مبرهنة الحصـــر :**

إذا وجد عدد طبيعي n_0 بحيث من أجل كل n بحيث $n \geq n_0$ ، $V_n \leq U_n \leq W_n$ وكان $\lim_{n\to+\infty} V_n = l$ و $\lim_{n\to+\infty} W_n = l$ حيث l عدد حقيقي. فإن $\lim_{n\to+\infty} U_n = l$.

مثلا : لتكن (U_n) ، (V_n) ، (W_n) المتتاليات العددية بحيث :

$$U_n = \cos 3n + n \text{ ، } V_n = \sin 5n + n \text{ ، } W_n = \frac{\sin 2n}{n}$$

نعلم أنه مهما يكون العدد الحقيقي x فإن $-1 \leq \cos x \leq 1$ و $-1 \leq \sin x \leq 1$

• مهما يكون n في $\mathbb{N}$: $\cos n \geq -1$ منه $\cos 3n + n \leq n-1$ أي $U_n \geq n-1$ ...(1)

و $\lim_{n\to+\infty}(n-1) = +\infty$ ...(2) ، من (1) و (2) وحسب مبرهنة الحد من الأسفل $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

• مهما يكون n في $\mathbb{N}$: $\sin 5n \leq 1$ منه $\sin 5n - n \leq 1-n$ أي $V_n \geq 1-n$ ...(3)

و $\lim_{n\to+\infty}(1-n) = -\infty$ ...(4) ، من (3) و (4) وحسب مبرهنة الحد من الأعلى $\lim_{n\to+\infty} V_n = -\infty$.

• من أجل كل n في $\mathbb{N}$: $-1 \leq \sin 2n \leq 1$ و $\frac{1}{n} > 0$ منه $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin 2n}{n} \leq \frac{1}{n}$

أي $-\frac{1}{n} \leq W_n \leq \frac{1}{n}$ ...(5) و ($\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 0$) ...(6) .

من (5) و (6) وحسب مبرهنة الحصر $\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$.

★ **تقارب متتالية محدودة و رتيبة :**

لتكن (U_n) متتالية عددية . • إذا كانت (U_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فإن (U_n) متقاربة. • إذا كانت (U_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل فإن (U_n) متقاربة.

★ **إيجاد نهاية متتالية تراجعية متقاربة :**

لتكن (U_n) متتالية عددية مجموعة تعريفها $\mathbb{D}$. تحقق مهما تكون قيمة n في $\mathbb{D}$ ، $U_{n+1} = f(U_n)$ حيث f دالة. • إذا كانت (U_n) متقاربة فإنّ نهايتها l تحقق المساواة $f(l) = l$.

تمرين تطبيقي :

لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = U_n^2 - U_n + 1 \qquad \forall n \ni \mathbb{N} \end{cases}$$

1- ادرس اتجاه تغير المتتالية (U_n) .

2- أثبت أنه : مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$: $U_n \geq \dfrac{1}{2}$.

3- برهن ، بالتراجع ، أنه مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$ فإن : $U_n \leq 1$.

4- استنتج أن المتتالية (U_n) متقاربة وأحسب نهايتها .

الحل :

1- مهما يكون n في $\mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = U_n^2 - 2U_n + 1 = (U_n - 1)^2$

منه : $U_{n+1} - U_n \geq 0$ منه المتتالية (U_n) متزايدة .

2- مهما يكون n في $\mathbb{N}$ ، $n \geq 0$ والمتتالية (U_n) متزايدة ، منه $U_n \geq U_0$

وعليه : مهما يكون n في $\mathbb{N}$: $U_n \geq \frac{1}{2}$.

3- من أجل كل عدد طبيعي n لنسمي $p(n)$ القضية $U_n \leq 1$.

• مرحلة الابتداء $p(0)$ هي القضية $\frac{1}{2} \leq 1$ وهي قضية صحيحة... (α)

• ليكن m عددا طبيعيا كيفيا لنفرض $p(m)$ صحيحة أي لنفرض $U_m \leq 1$

ولنبرهن $p(m+1)$ صحيحة لذلك نقارن 1 و U_{m+1}.

لدينا $U_{m+1} - 1 = U_m^2 - U_m = U_m(U_m - 1)$.

ولدينا : $U_m - 1 \leq 0$ (فرضا) ، $U_m > 0$ (لأن $U_m \geq \frac{1}{2}$).

منه $U_m(U_m - 1) \leq 0$ منه $U_{m+1} - 1 \leq 0$ منه $U_{m+1} \leq 0$ وهو المطلوب وعليه الخاصية p وراثية ... (β)

من (α) و (β) وحسب مبدأ البرهان بالتراجع :

مهما يكون n في $\mathbb{N}$: $U_n \leq 1$ ... (γ)

4- مما سبق : (U_n) متزايدة و (U_n) محدودة مما الأعلى (من (γ)) منه (U_n) متقاربة .

ولدينا $U_{n+1} = f(U_n)$ حيث f الدالة المعرفة بـ : $f(x) = x^2 - x + 1$

وإذا سمينا l نهاية المتتالية (U_n) لدينا l تحقق $f(l) = l$ أي $l^2 - l + 1 = l$ أي $l^2 - 2l + 1 = l$ أي $(l-1)^2 = l$ أي $l = 1$ منه $\lim_{n \to +\infty} U_n = 1$.

تمارين ومشكلات

البرهان بالتراجع :

1 – من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نضع :

$S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$.

1. أحسب كلا من S_1 ، S_3 ، S_5 ، S_6 .
2. ليكن m عددا طبيعيا ، غير معدوم ، كيفيا : أعط عبارة S_{m+1} بدلالة S_m .
3. برهن بالتراجع أنه : مهما يكون العدد الطبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن:

$S_n = \frac{1}{6}n.(n+1).(2n+1)$.

---

2 – من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع :

$S_n = 0.1 + 1.2 + 2.3 + ... + n(n+1)$.

1. أحسب كلا من S_0 ، S_1 ، S_2 ، S_5 .
2. برهن بالتراجع أنه : مهما يكون العدد الطبيعي n فإن :

$S_n = \frac{1}{3}n.(n+1).(n+2)$.

3. احسب S_{2007} .

---

3 – من أجل كل عدد طبيعي n ، بحيث $n \geq 3$ ، نضع :

$S_n = (3-1).2^{3-2} + (4-1).2^{4-2} + (5-1).2^{5-2} + ... + (n-1).2^{n-2}$.

1. برهن بالتراجع أنه مهما يكون العدد الطبيعي n حيث $n \geq 3$ فإنّ : $S_n = (n+2).2^{n-1}$.
2. استعمل عبارة S_n لحساب المجموع S حيث :

$S = 6.2 + 9.2^2 + 12.2^3 + 15.2^4 + 18.2^5 + 21.2^6 + 24.2^7 + 27.2^8 + 30.2^9 + 33.2^{10}$.

---

4 – من أجل n عدد طبيعي ، نضع : $A = 9^n - 1$ و $B = 9^n + 1$

ونسمي p الخاصية « A مضاعف للعدد 8 » و Q الخاصية « B مضاعف للعدد 8 »

1. برهن أن الخاصية p وراثية .
2. برهن ان الخاصية Q وراثية.
3. برهن ان القضية $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n .
4. هل القضية $p(n)$ صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n ؟

---

5 - برهن بالتراجع أنه :

1. من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $(13^n - 3^n)$ عدد طبيعي مضاعف للعدد 5.
2. من أجل كل عدد طبيعي n بحيث $n \geq 2$ فإن $2^{3n-1} + 4.6^{2n-3}$ عدد طبيعي مضاعف للعدد 7.

---

6 - a عدد حقيقي موجب تماما :

برهن بالتراجع أنه مهما يكون العدد الطبيعي n فإن $(a+1)^n \geq n.a+1$

(ملاحظة : المتباينة المذكورة أعلاه معروفة تحت اسم متباينة برنولي)

---

7 - برهن بالتراجع أنه :

1. من أجل كل عدد طبيعي n بحيث $n \geq 2$ فإن : $5^n \geq 3^n + 4^n$.
2. من أجل كل عدد طبيعي n بحيث $n \geq 3$ فإن : $4^n \geq (n+3)^2$.

---

8 - من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، نضع $n\,! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$

1. ليكن m عددا طبيعيا غير معدوم ، أعط عبارة : $(m+1)\,!$ بدلالة $m\,!$.
2. برهن بالتراجع أنه :

أ- مهما يكون العدد الطبيعي n بحيث $n \geq 1$ فإن :

$$1.1!+2.2!+3.3!+...+n.m! = (n+1)!-1$$

ب- مهما يكون العدد الطبيعي n بحيث $n \geq 1$ فإن : $n! \geq 2^{n-1}$.

(ملاحظة : من أجل n طبيعي بحيث : $n \geq 1$: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$

اصطلاحا : $0!=1$

من أجل n عدد طبيعي $n!$ يسمى « عاملي n » و « الدالة » عاملي موجودة في الحسابات العلمية)

عموميات على المتتاليات العددية

9 – (U_n) متتالية عددية معرفة بحدها العام $U_n = f(n)$ حيث f دالة عددية لمتغير حقيقي .

أدرس رتابة المتتالية (U_n) بالاعتماد على تغيرات الدالة f في كل حالة من الحالات التالية :

1. $U_n = 5 + \dfrac{3}{n+1}$ ، 2. $U_n = 2 + \dfrac{5}{n}$ ، 3. $U_n = \sqrt{2n+1}$ ، 4. $U_n = -2n^2 - 4$ ،

5. $U_n = \dfrac{3n+5}{n^2}$ ، 6. $U_n = 2n+1-\dfrac{3}{2n+1}$ ، 7. $U_n = -n^2 - 3n + 9000$.

---

10 – (U_n) متتالية عددية معرفة بحدها العام $U_n = f(n)$ حيث f دالة عددية لمتغير حقيقي .

ادرس رتابة المتتالية (U_n) بمقارنة حاصل القسمة $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ والعدد 1 في كل حالة من الحالات التالية ، حيث $\mathbb{D}$ مجموعة تعريف المتتالية (U_n) .

1. $U_n = \dfrac{3^n}{\sqrt{n+1}}$ و $\mathbb{D} = \mathbb{N}^*$ ، 2. $U_n = 2n.(0,99)^n$ و $\mathbb{D}$ مجموعة الأعداد الطبيعية n حيث $n \geq 100$

3. $U_n = \dfrac{n!}{2^n}$ و $\mathbb{D} = \mathbb{N}^*$ ، 4. $U_n = \dfrac{2^n}{3^n}$ و $\mathbb{D} = \mathbb{N}$. (تعريف $n!$ في التمرين 8).

---

11 – ادرس رتابة المتتالية (U_n) بدراسة إشارة الفرق $U_{n+1} - U_n$ في كل حالة من الحالات التالية .

1. $U_n = n^2 - n$ ، 2. $U_n = \dfrac{n+3}{2n+5}$ ، 3. $U_n = 3^n - n + 1$، 4. $\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = U_n + 2n + 5 \end{cases}$.

---

12 – ليكن a عددا حقيقيا مفروضا بحيث $a \geq 0$.

وليكن (U_n) المتتالية بحيث : $\begin{cases} U_0 = a \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 3} \end{cases}$

1. نفرض $a = 0$: برهن بالتراجع أن المتتالية (U_n) متزايدة تماما.
2. نفرض $a = 3$: برهن بالتراجع أن المتتالية (U_n) ثابتة.
3. نفرض $a = 6{,}5$: برهن بالتراجع أن المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

---

13 – (U_n) متتالية عددية :

1. باستعمال الطريقة المناسبة ، برهن أن المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل في كل حالة من الحالات التالية :

1 - $U_n = n^2 + n + 1$

2- $\begin{cases} U_0 = -6 \\ U_{n+1} = U_n + n^2 \end{cases}$

3- $U_n = 4n + 1 + \dfrac{1}{n+2}$

2. باستعمال الطريقة المناسبة ، برهن ان المتتالية (U_n) محدودة من الأعلى في كل حالة من الحالات التالية :

1 - $U_n = -n^2 - \frac{3}{2n+5} + 18$

-2 $\begin{cases} U_0 = -11 \\ U_{n+1} = U_n - \frac{1}{3n+2} \end{cases}$

-3 $U_n = \frac{2n+4}{n+3}$

المتتاليات الحسابية والمتتاليات الهندسية ومتتاليات متعلقة بها

14 – لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2n - 3 \end{cases}$$

ولتكن (V_n) المتتالية بحيث : $V_n = U_{n+1} - U_n$

1. أثبت أن (V_n) متتالية حسابية.

2. تأكد أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون $U_n = U_0 + V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$ ثم أعط عبارة U_n بدلالة n ، $(n \ni \mathbb{N})$.

---

15 – بإتباع طريقة مماثلة للطريقة المستعملة في التمرين 14 ، أعط عبارة U_n بدلالة n في كل حالة من الحالتين :

1. المتتالية (U_n) معرفة بما يلي : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = U_n + 3^n \end{cases}$

2. المتتالية (U_n) معرفة بما يلي : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2.U_n \end{cases}$

---

16 – أعط عبارة الحد العام للمتتالية (U_n) ثم أحسب المجموع S_n حيث $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

في كل حالة من الحالات التالية :

1- (U_n) معرفة بـ : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = U_n + 3^n \end{cases}$.

2- (U_n) معرفة بـ : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = -2U_n - 1 \end{cases}$.

3- (U_n) معرفة بـ : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = 4U_n + 7 \end{cases}$.

تقارب متتالية عددية

17 – ادرس تقارب المتتالية العددية (U_n) في كل حالة من الحالات التالية :

-1 $U_n = 2 + \frac{5}{3^n}$، -2 $U_n = \frac{2}{n} - 1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n$، -3 $U_n = \frac{3n^2 + 5n + 1}{n+1}$،

-4 $U_n = \frac{n+5}{n^2+1} - n$، -5 $U_n = 6^n - 7^n$ ، -6 $U_n = \frac{2^n + 1}{3^n + 8}$ ،

-7 $U_n = \frac{2.3^n + 5.2^n}{7.4^n - 3.8^n}$، -8 $U_n = 5(-3)^n$ ، -9 $\begin{cases} U_0 = 1 \\ 3U_{n+1} = 2U_n + 5 \end{cases}$ ،

-10 $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = 5U_n - 3 \end{cases}$.

---

18 – باستعمال الطريقة المناسبة ، برهن أن المتتالية (U_n) تحقق الشرط (φ) ثم ادرس تقارب المتتالية (U_n) في كل حالة من الحالات التالية :

-1 $U_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n^2 + 2}$ و $(\varphi) : 0 \le U_n \le \frac{2n+1}{3n^2+2}$

-2 $U_n = \frac{2n + (-1)^n}{(-1)^n + 4}$ و $(\varphi) : U_n \ge \frac{2n-1}{5}$

-3 (U_n) معرفة بـ: $\begin{cases} U_0 = -0{,}5 \\ U_{n+1} = 3U_n + 2n - 2 \end{cases}$ و $(\varphi) : U_n \le -n$

مسائل

19 – (U_n) متتالية عددية معرفة بما يلي : $\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1}{n}(U_n - 1) + 1 \end{cases}$

1. برهن بالتراجع أنه ، مهما يكون العدد الطبيعي غير المعدوم n فإن $U_n > 1$.

2. ليكن n عددا طبيعيا غير المعدوم ، قارن العددين 1 و $\frac{U_{n+1}-1}{U_n-1}$.

3. أدرس رتابة المتتالية (U_n).

4. أثبت أن المتتالية (U_n).

5. برهن بالتراجع أنه مهما يكون العدد الطبيعي n حيث $n \geq 2$ فإن $U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

6. استنتج نهاية المتتالية (U_n).

20 – تقبل أنه توجد متتالية عددية وحيدة (U_n) مجموعة تعريفها $\mathbb{N}$ ومعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{7U_n}{24U_n - 5} \end{cases}$$

1. احسب U_1 ، U_2 ، U_3 ، هل المتتالية (U_n) رتيبة.

2. برهن بالتراجع أنه مهما يكون العدد الطبيعي n فإن $U_n \neq 0$.

3. نعتبر المتتالية $(V_n)_{n \ni N}$ المعرفة بما يلي : $V_n = \frac{1}{U_n} - 2$:

أ- برهن أن (V_n) متتالية هندسية .

ب- أعط عبارة الحد العام V_n ثم عبارة الحد العام U_n بدلالة العدد الطبيعي n.

جـ- أحسب $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

---

21 – تقبل أنه توجد متتالية عددية وحيدة (U_n) مجموعة تعريفها $\mathbb{N}$ معرفة بما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 2}{2U_n - 3} \end{cases}$$

1. برهن بالتراجع أنه ، مهما يكون العدد الطبيعي n فإن $U_n \neq 1$.

2. نعتبر المتتالية $(V_n)_{n\in N}$ بحيث $V_n = \frac{1}{1-U_n}$.

أ- برهن أن (V_n) متتالية حسابية.

ب- أعط عبارة الحد العام V_n ثم عبارة الحد العام U_n بدلالة العدد الطبيعي n .

جـ - أدرس رتابة المتتالية (U_n) .

د- أدرس تقارب المتتالية (U_n) .

---

22 – قام المشرف على مكتبة بدراسة لعدد المنخرطين في هذه المكتبة فمكنته هذه الدراسة من استنتاج ما يلي :

في كل سنة % 25 من المنخرطين يلغون انخراطاتهم وهناك 300 منخرطا جديدًا.

نعلم أن عدد المنخرطين في المكتبة عام 2000 كان 800 ومن أجل كل عدد طبيعي n ، نرمز بالرمز U_n إلى عدد المنخرطين في عام $2000+n$.

1. أوجد U_1 ، U_2 .
2. أثبت أنه : مهما يكون العدد الطبيعي n فإن :

$$U_{n+1} = (0,75)U_n + 300 .$$

3. أحسب الحد العام U_n بدلالة العدد الطبيعي n .
4. كم أصبح عدد المنخرطين في المكتبة عام 2016.

---

23 – في 2005/01/01 أودع شخص A مبلغا قدره DA 25000 في مصرف يتعامل بفوائد مركبة بنسبة % 2 سنويا ، (فوائد مركبة بنسبة % 2 سنويا يعني بعد مرور كل سنة يضاف إلى رصيد الزبون % 2 من المبلغ الذي بقي في صندوق المصرف طول هذه السنة) وابتداء من عام 2006 يتلزم على هذا الشخص A سحب مبلغا قدره DA 2000 في 01/01 من كل عام.

من أجل كل عدد طبيعي n ، نسمي U_n الرصيد ، المقدر بالدنانير، للشخص A في صندوق المصرف في 01/01/ n+2005 .

1. أحسب U_1 و U_2.
2. اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = (0,1)U_n - 2000$.
3. أعط عبارة الحد العام U_n بدلالة العدد الطبيعي n .

4. كم يصبح رصيد الشخص A ، في صندوق المصرف، في 2014/01/01 ؟

---

24 – تمكن شاركة مالية زبائنها من اقتراض مبلغا قدره 300.000 DA وفق شروط تسديد الديون التالية :

بعد مرور كل شهر ، يزداد دين الزبون بـ $1,5\ \%$ مما كان عليه في هذا الشهر وعلى الزبون أن يرجع 15.000 DA شهريا إلى الشاركة.

إذا كان الدين في الشهر الأخير أقل من 15.000 DA على الزبون أن يدفع (رغم ذلك 15.000 DA) .

من أجل كل عدد طبيعي n نسمي U_n المبلغ ، المقدر بالدنانير ، الباقي للتسديد بعد مرور n شهرًا.

1. أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ $U_{n+1} = 1,015.U_n - 15000$.
2. أحسب U_{22} ، U_{23} ، U_{24} . ماذا تستنتج فيما يخص المدّة اللازمة لتسديد الدين ؟

---

25 – الاشتراك السنوي في نادي الإعلام الآلي يعتمد على المبدأ التالي :

ثمن المشاركة الابتدائية هو : 10.000 DA .

في كل سنة وابتداءًا من السنة الثانية ، يزداد ثمن المشاركة السنوية بنسبة $5\ \%$ مما كان عليه في السنة السابقة ثمّ تطرح منه 50 DA .

أصبح هشام مشاركا في هذا النادي ابتداءًا من 2004/01/01.

من أجل كل عدد طبيعي n ، نرمز بالرمز U_n إلى ثمن المشاركة السنوية ، المقدر بالدنانير ، لهشام لسنة $2004+n$.

1. أثبت أنه $U_{n+1} = 1,05.U_n - 50$.
2. أعط عبارة U_n بدلالة العدد الطبيعي n .
3. من أجل كل عدد طبيعي n نسمي S_n المبلغ الكلي ، المقدر بالدنانير ، الذي يكون دفعه هشام لتغطية n سنة من المشاركة.

4. أحسب S_n بدلالة العدد الطبيعي n.

حلول التمارين و المشكلات

التمرين 1 :

1/ حساب كل من S_1 ، S_3 ، S_5 ،S_6.

لدينا : $S_1 = 1^2 = 1$.

ولدينا : $S_3 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$.

ولدينا : $S_5 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$.

ولدينا : $S_6 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 = 91$.

2/ عبارة S_{m+1} بدلالة S_m حيث m عدد كيفي .

لدينا $S_{m+1} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + m^2 + (m+1)^2$

$= S_m + (m+1)^2$

3/ البرهان بالتراجع أنه ، مهما يكون العدد الطبيعي n حيث $n \geq 1$ فإن:

$$S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

من أجل كل عدد طبيعي n لنحسب $p(n)$ القضية $S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

- $p(1)$ هي القضية $S_n = \frac{1}{6}(1)(1+1)(2\times1+1)$

وهي القضية : $S_1 = 1$ وهي صحيحة.

ومنه $p(0)$ صحيحة .

- ليكن m عددا طبيعيا كيفيا ، نفرض أن $p(m)$ صحيحة ونبرهن أن $p(m+1)$ صحيحة.

- لنأخذ m عددا طبيعيا كيفيا حيث $m \geq 1$ وليفرض أن $p(m)$ صحيحة، أي لنفرض أن $S_m = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$ ولنبرهن أن $p(m+1)$ صحيحة أي لنبرهن:

$$S_{m+1} = \frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3)$$

لدينا: $S_{m+1} = S_m + (m+1)^2$

(من الفرع السابق)

$$= \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)(m+1)^2$$

(من الفرض)

$$= \frac{1}{6}(m+1)(m(2m+1)+6(m+1))$$

$$= \frac{1}{6}(m+1)(2m^2 + 7m + 6)$$

$$= \frac{1}{6}(m+1)(m+2)(2m+3)$$

ومنه $p(m+1)$ صحيحة.

ومنه جواب $p(m)$ يؤدي الى جواب $p(m+1)$ (من أجل كل عدد طبيعي m حيث $m \geq 1$)

وعليه الخاصية p وراثية.

من المرحلتين الأولى والثانية وحسب مبدأ البرهان بالتراجع:

مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$ و $n \geq 1$، $p(n)$ حقيقة صحيحة.

التمرين 2 :

انظر كيفية حل التمرين 1.

التمرين 3 :

1/ البرهان بالتراجع أنه مهما يكون العدد الطبيعي n حيث $n \geq 3$ فإن:

$$S_n = (n-2).2^{n-1}$$

اتبع ضمن المراحل الموضحة في حل التمرين 1.

2/ استعمال عبارة S_n لحساب مجموع S حيث:

$$S = 6.2 + 9.2^2 + 12.2^3 + 15.2^4 + 18.2^5 + ... + 33.2^{10}$$

لدينا :

$$S = 3(2.2 + 3.2^2 + 4.2^3 + ... + 11.2^{10})$$

$$S = 3\left[(3-1).2^{3-2} + (4-1).2^{4-2} + (5-1).2^{5-2} + ... + (12-1).2^{12-2}\right]$$

$$S = 3 \times S_{12}$$

$$S = 3 \times (12-2).2^{12-1}$$

$$S = 3 \times 10 \times 2^{11}$$

$$S = 61440$$

التمرين 4 :

1/ البرهان أن الخاصية p وراثية .

ليكن m عدا طبيعيا ، نفرض أن $p(m)$ صحيحة أي A مضاعف العدد 8 ونبرهن أن $p(m+1)$ صحيحة أي أن $9^{m+1} - 1$ مضاعف لـ 8 يعني أنه يوجد عدد غير صحيح وليكن k بحيث :

$9^m - 1 = 8k$ عندئذ :

$9^{m+1} - 1 = 9^m \times 9 - 1$ (حسب الفرض) $= 8 \times 9^m + 9^m - 1$

أي أن : $9^{m+1} - 1 = 8(9^m + k)$

منه يوجد عدد صحيح وليكن k' بحيث : $9^{m+1} - 1 = 8k'$.

يكفي أخذ : $k' = 9^m + k$.

ومنه : $p(m+1)$ صحيحة.

ومنه صواب $p(m)$ يؤدي إلى صواب $p(m+1)$ ومنه الخاصية p وراثية .

2/3/4/ استفد من الفرع الأول ومن التمرين 1.

التمرين 5 :

1/ البرهان بالتراجع أنه :

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $(13^n - 3^n)$ عدد طبيعي مضاعف للعدد 5.

من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ ، لنسمي $p(n)$ القضية : $(13^n - 3^n)$ مضاعف للعدد 5 . (على أساس أن $(13^n - 3^n)$ فعلا عدد طبيعي).

مرحلة الابتداء :

$p(1)$ هي القضية $(13^1 - 3^1)$ مضاعف العدد 5.

وهي القضية 10 مضاعف العدد 5.

وهي صحيحة.

ومنه $p(1)$ صحيحة ... (1)

البرهان أن الخاصية p وراثية :

لنأخذ m عددا طبيعيا كيفيا حيث $m \geq 1$ ولنفرض $p(m)$ صحيحة أي لنفرض أن $(13^m - 3^m)$ مضاعف للعدد 5 أي لنفرض أنه يوجد عدد صحيح وليكن k بحيث : $(13^m - 3^m) = 5k$ ولنبرهن أن $p(m+1)$ صحيحة أي لنبرهن أن: $(13^{m+1} - 3^{m+1})$ مضاعف للعدد 5.

لدينا : $13^{m+1} - 3^{m+1} = 13^m \times 13 - 13^m \times 3$

$$= 13^m \times 13 - 13 \times 3^m + 13 \times 3^m - 3^m \times 3$$

$$= 13(13^m - 3^m) + 3^m(13-3)$$

$$= 13 \times 5k + 13^m \times 10$$

ومنه يوجد عدد صحيح k' حيث:

$$13^{m+1} - 3^{m+1} = 5k'$$

يكفي أخذ: $k' = 13k + 2 \times 3^m$

وعليه : $p(m+1)$ صحيحة.

ومنه صواب $p(m)$ يؤدي إلى صواب $p(m+1)$.

وعليه الخاصية p وراثية ... (2).

ومنه : من (1) و (2) وسبب مبدأ البرهان بالتراجع نجد : مهما تكون قيمة n في $N - \{0\}$ ، $p(n)$ قضية صحيحة.

2/ بنفس الكيفية نبرهن أنه :

من أجل كل عدد طبيعي n بحيث $n \geq 2$ فإن $(2^{3n-1} + 4.6^{2n-3})$ عدد طبيعي مضاعف لـ 7.

التمرين 6 :

البرهان بالتراجع أنه مهما يكون العدد الطبيعي n فإن $(\sigma+1)^n \geq n\sigma + 1$، حيث σ عدد حقيقي موجب تماما.

من أجل كل عدد طبيعي n ، لنحسب $p(n)$ القضية : $(\sigma+1)^n \geq n\sigma+1$.

مرحلة الابتداء :

$p(0)$ هي القضية : $(\sigma+1)^0 \geq 0\times\sigma+1$

وهي القضية : $1 \geq 1$

وهي صحيحة

ومنه $p(0)$ صحيحة ... (1).

البرهان أن الخاصية p وراثية :

لنأخذ m عددا طبيعيا كيفيا ولنفرض $p(m)$ صحيحة أي لنفرض أن :

$(\sigma+1)^m \geq m\sigma+1$

لدينا فرضا : $(\sigma+1)^m \geq m\sigma+1$

وعليه : $(\sigma+1)+(\sigma+1)^m \geq (\sigma+1)+(m\sigma+1)$

أي أن : $(\sigma+1)^{m+1} \geq \sigma^2 m+\sigma+m\sigma+1$

أي أن : $(\sigma+1)^{m+1} \geq (m+1)\sigma+1+\sigma^2 m$

ولكن : $(m+1)\sigma+1+\sigma^2 m \geq (m+1)\sigma+1$ (لأن : $\sigma^2 m \geq 0$)

ومنه : $(\sigma+1)^{m+1} \geq (m+1)\sigma+1$

وعليه : $p(m+1)$ صحيحة.

ومنه صواب $p(m)$ يؤدي إلى صواب $p(m+1)$.

وعليه الخاصية p وراثية. ....(2).

الخاتمة : من (1) و (2) وحسب مبدأ البرهان بالتراجع نجد : مهما تكون قيمة n في $\mathbb{N}$ ،

$p(n)$ قضية صحيحة.

التمرين 7 :

1/ البرهان بالتراجع أنه :

من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ فإن : $5^n \geq 3^n+4^n$

اتبع نفس الخطوات الواردة في حل التمرين السابق مع الملاحظة من أجل n في $\mathbb{N}$ و $n \geq 2$

لدينا :

$$5\times3^n+5\times4^n = (2+3)\times3^n+(1+4)\times4^n$$
$$= 3^{n+1}+4^{n+1}+2\times3^n+4^n$$

2/ البرهان بالتراجع انه :

من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 3$ فإن $4^n \geq (n+3)^2$

اتبع نفس الخطوات الواردة في حل (التمرين 6) مع الملاحظة من أجل n في $\mathbb{N}$ و $n \geq 2$

لدينا :

$$\begin{aligned} 4(n+3)^2 &= 4n^2 + 24n + 36 \\ &= n^2 + 8n + 16 + 3n^2 + 16n + 20 \\ &= (n+4)^2 + 3n^2 + 16n + 20. \end{aligned}$$

التمرين 8 :

استفد من (التمرين 1) ومن (التمرين 6).

التمرين 9 :

دراسة رتابة المتتالية (U_n) بالاعتماد على تغيرات الدالة f في كل ما يلي :

1/ $U_n = 5 + \dfrac{3}{n+1}$

المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

2/ $U_n = -2 - \dfrac{5}{n}$

المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

3/ $U_n = \sqrt{2n+1}$

المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

4/ $U_n = -2n^2 - 4$

المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

5/ $U_n = \dfrac{3n+5}{n^2}$

المتتالية (U_n) متناقصة تماما. (لاحظ أن : $U_n = \dfrac{3}{n} + \dfrac{5}{n^2}$)

6/ $U_n = 2n + 1 - \dfrac{3}{2n+1}$

المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

7/ $U_n = -n^2 - 3n + 9000$

المتتالية (U_n) متناقصة تماما.

(الإجابة التفصيلية في هذا التمرين تعتمد على درس المشتقات والدوال الأصلية).

التمرين 10 :

دراسة رتابة المتتالية (U_n) بمقارنة حاصل القسمة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ والعدد 1 في كل ما يلي :

1/ $U_n = \frac{3^n}{\sqrt{n+1}}$ و $\mathbb{D} = \mathbb{N}^*$.

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$

لدينا : $U_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+2}}$

وعليه :
$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+2}} \times \frac{\sqrt{n+1}}{3^3}$$
$$= 3\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$$

عندئذ :
$$\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 = 3.\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - 1$$
$$= \frac{\left(3.\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} - 1\right).\left(3.\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} + 1\right)}{3\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} + 1}$$
$$= \frac{9\frac{n+1}{n+2} - 1}{3\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} + 1}$$
$$= \frac{8n-1}{(n+2)\left(3\sqrt{\frac{n+1}{n+2}} + 1\right)}$$

ومنه : $\frac{U_{n+1}}{U_n} - 1 > 0$

أي أن : $U_{n+1} > U_n$ (لأن $U_n > 0$)

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة تماما.

3/ $U_n = \frac{n!}{2^n}$ و $D = \mathbb{N}^*$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$

لدينا : $U_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$

وعليه :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)n!}{2^n \times 2} \times \frac{2^n}{n!}$$

$$= \frac{n+1}{2}$$

وعليه : $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$

أي أن : $U_{n+1} \geq U_n$ (لأن $U_n > 0$)

ومنه المتتالية (U_n) متزايدة.

التمرين 13 :

(U_n) متتالية عددية.

1/ البرهان أن المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل وهذا بإتباع طريقة مناسبة :

$\prec U_n = n^2 + n + 1$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

لدينا $n \geq 0$ أي أن : $n^2 \geq 0$

وعليه : $n^2 + n \geq 0$

ومنه : $n^2 + n + 1 \geq 1$

وهذا يعني أن : $U_n \geq 1$

ومنه المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل بالعدد 1.

➢ $\begin{cases} U_0 = -6 \\ U_{n+1} = U_n + n^2 \end{cases}$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

لدينا $U_{n+1} - U_n = n^2$

وعليه : $U_{n+1} - U_n \geq 0$

وبالتالي المتتالية (U_n) متزايدة.

وعليه : $U_{n+1} \geq U_0$

أي أن : $U_n \geq -6$

ومنه المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل بالعدد (-6) .

➢ $U_n = 4.n + 1 + \dfrac{1}{n+2}$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

عندئذ : $\dfrac{1}{n+2} > 0$ و $4.n + 1 > 0$

وعليه : $4.n + 1 + \dfrac{1}{n+2} > 1$

أي أن : $U_n > 1$

ومنه المتتالية (U_n) محدودة من الأسفل بالعدد 1.

2/ بنفس الكيفية يكون التعامل للإثبات أن (U_n) محدودة من الأعلى إذ يكفي إيجاد عدد حقيقي ثابت α حيث :

مهما يكون n من $\mathbb{N}$ فإن : $U_n \leq \alpha$.

التمرين 14 :

1/ الإثبات أن (V_n) متتالية حسابية .

ليكن n عددا طبيعيا .

لدينا : $V_{n+1} - V_n = U_{n+2} - U_{n+1}$

$= (U_{n+1} + 2n + 2 - 3) - U_{n+1}$

$= U_{n+1} + 2n + 2 - 3 - (U_n + 2n - 3)$

$$= U_{n+1} - U_n + 2$$
$$= V_n + 2$$

ومنه المتتالية (V_n) متتالية حسابية أساسها r حيث $r = 2$.

2/ التأكد أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n يكون :

$$U_n = U_0 + V_0 + V_1 + ... + V_{n-1}$$

ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ، عندئذ من المساواة : $V_n = U_{n+1} + U_n$ نجد :

$$\begin{cases} V_0 = U_1 - U_0 \\ V_1 = U_2 - U_1 \\ V_2 = U_3 - U_2 \\ \vdots \\ V_{n+1} = U_n - U_{n-1} \end{cases}$$

بالجمع طرف لطرف وبعد الاختزال نجد :

$$V_0 + V_1 + ... + V_{n-1} = U_n - U_0$$

وعليه : $U_n = U_0 + V_0 + V_1 + ... + V_{n-1}$

➢ إعطاء عبارة U_n بدلالة n :

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

• نفرض أن $n \neq 0$:

لدينا : $U_n = U_0 + V_0 + V_1 + ... + V_{n-1}$

(مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية) $= U_0 + \frac{n}{2}(V_0 + V_{n-1})$

$$= 1 + \frac{n}{2}(U_1 - U_0 + V_0 + (n-1)r)$$

$$= 1 + \frac{n}{2}(2U_1 - 2U_0 + (n-1)r)$$

$$= 1 + \frac{n}{2}(2(U_0 - 3) - 2.U_0 + (n-1)r)$$

$$= 1 + \frac{n}{2}(-6 + (n-1) \times 2)$$

$$= 1 + \frac{n}{2}(2n - 8)$$

$$= n.(n - 4) + 1$$

• ولكن : $U_0 = 1 = 0.(0 - 4) + 1$

ومنه من أجل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $U_n = n.(n - 4) + 1$.

التمرين 15 :

إعطاء عبارة الحد العام للمتتالية (U_n) ثم حساب S_n حيث :

$$S_n = U_0 + U_1 + ... + U_n$$

1/ (U_n) معرفة بـ : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 3.U_n + 5^2 \end{cases}$

نعرف المتتالية (V_n) بـ: $V_n = U_n + \frac{b}{1 - \sigma}$ $(\sigma = 3$ وَ $5 = b)$ انظر الدرس .

$$= U_n + \frac{5}{2}$$

لنبين أن المتتالية (U_n) هندسية – ومن الدرس – الأساس هو σ أي 3 .

وعليه : $V_n = V_0 + \sigma^n$

$$= (U_0 + \frac{5}{2}) \times 3^n$$

$$= \frac{9}{2} + 3^n$$

عندئذ : $U_n = V_n - \frac{5}{2}$

$$= \frac{9}{2} \times 3^n - \frac{5}{2}$$

3/2/ بنفس الكيفية يمكن التعامل في الحالتين المتبقيتين.

التمرين 16 :

دراسة تقارب المتتالية العددية (U_n) في كل حالة من الحالات التالية :

/1 $U_n = 2 - \frac{5}{3^n}$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ عندئذ :

$$U_n = 2 + 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ولكن $\frac{1}{3}$ ثابت وَ $-1 < \frac{1}{3} < 1$.

ومنه $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

وعليه : $\lim_{n \to +\infty} U_n = 2$

ومنه المتتالية (U_n) متقاربة نحو 2.

/3 $U_n = \frac{3.n^2 + 5.n + 1}{n + 1}$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$:

لدينا : $\lim_{n \to +\infty} U_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{3.n^2}{n}$

$$= \lim_{n \to +\infty} 3.n$$

$$= +\infty$$

ومنه المتتالية (U_n) متباعدة .

/5 $U_n = 6^n - 7^n$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ عندئذ :

$$U_n = 7^n.\left(\frac{6^n}{7^n} - 1\right)$$

$$= 7^n.\left(\left(\frac{6}{7}\right)^n - 1\right)$$

ومنه : $\lim_{n \to +\infty} U_n = -\infty$

لأن : $\lim_{n\to+\infty} 7^n = +\infty$ وَ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{6}{7}\right)^n = 0$ (لأن : $\begin{cases} -1 < \frac{6}{7} < 1 \\ 7 > 1 \end{cases}$)

ومنه المتتالية (U_n) متباعدة.

7/ $U_n = \dfrac{2.3^n + 5.2^n}{7.4^n - 3.8^n}$

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ عندئذ :

$$U_n = \frac{3^n.\left(2+5.\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{8^n\left(7.\left(\frac{4}{8}\right)^n - 3\right)}$$

$$= \left(\frac{3}{8}\right)^n \times \frac{2+5.\left(\frac{2}{3}\right)^n}{7.\left(\frac{1}{2}\right)^n - 3}$$

وبما أن : $-1 < \frac{2}{3} < 1$ وَ $-1 < \frac{1}{2} < 1$ وَ $-1 < \frac{3}{8} < 1$

فإن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ وَ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ وَ $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n = 0$

ومنه : $\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

وعليه : (U_n) متقاربة نحو الصفر .

التمرين 17 :

1/ $U_n = \dfrac{2.n + (-1)^n}{3.n^2 + 2}$ ، لنتأكد أن : $0 \le U_n \le \dfrac{2.n+1}{3.n^2+2}$ ثم ندرس تقاربها .

➢ ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ عندئذ :

• لدينا : $U_n - \dfrac{2n+1}{3n^2+2} = \dfrac{2.n + (-1)^n - 2.n - 1}{3.n^2 + 2}$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{3.n^2 + 2}$$

عندئذ : في حالة n زوجي نجد : $(-1)^n - 1 = 0$

في حالة n فردي نجد : $(-1)^n - 1 = -2$

وعليه : $U_n - \frac{2.n+1}{3.n^2+2} \leq 0$ أي أن : $U_n \leq \frac{2.n+1}{3.n^2+2}$ ...(1).

• من أجل $n = 0$ يكون $U_n = 0$.

من أجل $n \neq 0$ يكون $2n \geq 2$ وَ $(-1)^n \in \{1;-1\}$

وعليه : $U_n \geq 0$ ... (2).

من (1) و (2) نجد أن : $0 \leq U_n \leq \frac{2.n+1}{3.n^2+2}$.

ولدينا : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{3n^2+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{3n^2}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{3n}$$

$$= 0$$

ومنه وحسب مبرهنة الحصر نجد أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

ومنه (U_n) متقاربة نحو الصفر .

2/ استفد من مبرهنة الحد من الأسفل لدراسة التقارب .

3/ استفد من مبرهنة الحد من الأعلى لدراسة التقارب .

التمرين 18 :

1/ البرهان بالتراجع أنه مهما يكون العدد الطبيعي غير المعدوم n فإن $U_n > 1$

استفد من حلول التمارين المتعلقة بالبرهان بالتراجع .

2/ المقارنة بين العددين 1 وَ $\frac{U_{n+1}-1}{U_n-1}$ من أجل n عدد طبيعي غير معدوم.

ليكن n عددا طبيعيا غير معدوم ك

لدينا : $\frac{U_{n+1}-1}{U_n-1} - 1 = \frac{\frac{1}{n}(U_n-1)+1-1}{U_n-1} - 1$

$$= \frac{1}{n} - 1$$

وبما أن : $n \geq 1$ يكون $\frac{1}{n} - 1 \leq 0$

وعليه : $\frac{U_{n+1} - 1}{U_n - 1} \leq 1$

3/ دراسة رتابة المتتالية (U_n) .

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$

لدينا : $\frac{U_{n+1} - 1}{U_n - 1} \leq 1$ (حسب السؤال 2)

أي أن : $U_{n+1} - 1 \leq U_n - 1$ (لأن $U_{n-1} > 1$ حسب السؤال 1).

أي أن : $U_{n+1} \leq U_n$

ومنه المتتالية (U_n) متناقصة.

4/ الإثبات أن (U_n) متقاربة.

لدينا : (U_n) متناقصة (حسب السؤال 3)

و (U_n) محدودة من الأسفل بـ 1 (حسب السؤال 1)

ومنه المتتالية (U_n) متقاربة.

5/ البرهان بالتراجع أنه مهما يكون العدد الطبيعي n حيث $n \geq 2$ فإن : $U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

استفد من حلول التمارين المتعلقة بالبرهان بالتراجع.

6/ استنتاج نهاية المتتالية (U_n) .

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}^*$

لدينا : $0 < U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ (حسب السؤالين 1 وَ 5)

أي أن : $1 < U_n \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

وعليه : $1 \leq U_n \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

وبما أن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ (لأن : $\frac{1}{2}$ ثابت وَ $-1 < \frac{1}{2} < 1$)

فإنه وحسب نظرية الحصر :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$$

ومنه المتتالية (U_n) متقاربة نحو 1.

التمرين 19: (الفكرة)

• لنثبت أن (V_n) هندسية .

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ عندئذ :

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} - 2 = \frac{24.U_n - 5}{7.U_n} - 2$$

أي : $V_{n+1} = \frac{10.U_n - 5}{7.U_n} = \frac{10}{7} - \frac{5}{7} = \frac{1}{U_n}$

أي : $V_{n+1} = -\frac{5}{7}.\left(\frac{1}{U_n} - 2\right) = -\frac{5}{7}.V_n$

ومنه (V_n) متتالية هندسية أساسها $\left(-\frac{5}{7}\right)$

• V_1 ثم U_n بدلالة n

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

➢ لدينا : $V_n = V_0.\left(-\frac{5}{7}\right)^n$

$$= \left(\frac{1}{U_0} - 2\right).\left(-\frac{5}{7}\right)^n$$

$$= \left(-\frac{5}{7}\right)^n$$

➢ ولدينا : $V_n = \frac{1}{U_n} - 2$

أي أن : $U_n = \dfrac{1}{V_n + 2}$

$$= \frac{1}{\left(-\frac{5}{7}\right)^n + 2}$$

• حساب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

لدينا : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{5}{7}\right)^n = 0$ (لأن : $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$)

ومنه : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{1}{2}$

التمرين 20: (الفكرة)

• البرهان أن المتتالية (V_n) حسابية.

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$ عندئذ :

لدينا : $V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{1 - U_{n+1}} - \dfrac{1}{1 - U_n}$

$$= \frac{1}{1 - \frac{U_n - 2}{2.U_n - 3}} - \frac{1}{1 - U_n}$$

$$= \frac{2.U_n - 3}{U_n - 1} + \frac{1}{U_n - 1}$$

$$= \frac{2.U_n - 2}{U_n - 1}$$

$$= 2$$

ومنه المتتالية (V_n) حسابية أساسها 2.

• (V_n) و (U_n) بدلالة n :

ليكن n عنصرا من $\mathbb{N}$

➤ لدينا : $V_n = V_0 + n \times 2$

$$= \frac{1}{1-U_0} + 2.n$$

$$= 2.n + 1$$

➤ لدينا : $V_n = \frac{1}{1-U_n}$

أي أن : $V_n - V_n.U_n = 1$

أي أن : $U_n = \frac{V_n - 1}{V_n}$

$$= \frac{2.n}{2.n+1}$$

التمرين 21 :

1/ إيجاد U_1 وَ U_2:

لدينا : $U_1 = 800 - \frac{25}{100} \times 800 + 300$

$$= \frac{75}{100} \times 800 + 300$$

$$= 900$$

ولدينا : $U_2 = U_1 - \frac{25}{100} \times U_1 + 300$

$$= \frac{75}{100} \times U_1 + 300$$

$$= 975$$

2/ الإثبات أنه مهما يكون العدد الطبيعي n فإن $U_{n+1} = (0,75) \times U_n + 300$

ليكن n عددا طبيعيا

لدينا : $U_{n+1} = U_n - \frac{75}{100} \times U_n + 300$

$$= \left(1 - \frac{25}{100}\right).U_n + 300$$

$$= \frac{75}{100}.U_n + 300$$

$$= (0,75).U_n + 300$$

3/ حساب الحد العام U_n بدلالة العدد الطبيعي n :

نعرف المتتالية V_n كما يلي :

$$V_n = U_n - \frac{b}{1-\sigma} = U_n - \frac{300}{0,25} = U_n - 1200 \quad (\sigma = 0,75 \text{ وَ } b = 300)$$

المتتالية (V_n) هندسية أساسها 0,75 .

عندئذ : $V_n = V_0 \times (0,75)^n$

$$= (U_0 - 1200) \times (0,75)^n$$

$$= (800 - 1200) \times (0,75)^n$$

$$= (-400) \times (0,75)^n$$

ومنه : $U_n = V_n + 1200$

$$= (-400) \times (0,75)^n + 1200$$

4/ عدد المنخرطين في المكتبة عام : 2016.

العدد المطلوب هو U_{16} عندئذ :

$$U_{16} = -400.(0,75)^{16} + 1200$$

1196 هي قيمة مقربة لـ U_{16} .